CẨM NANG CHO MÙA THI

CÁC KỸ THUẬT PHỔ BIẾN NHẤT

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

(LỚP 11 & ÔN THI THPT QUỐC GIA)

NGUYỄN HỮU BIỂN

https://www.facebook.com/nguyenhuubien1979
Email: ng.huubien@gmail.com

LỜI GIỚI THIỆU

Các em học sinh thân mến, bài tập giải phương trình lượng giác là một trong nhưng nội dung thường xuyên xuất hiện trong đề thi đại học, kiến thức về giải phương trình lượng giác các em được học trong chương trình giải tích lớp 11 kết hợp với các công thức và kiến thức nền tảng của lớp 10. Để giải phương trình lượng giác, điều đầu tiên các em cần là phải biết cách học thuộc các công thức biến đổi lượng giác cơ bản, tiếp theo các em cần học tập siêng năng, chuyên cần để đúc rút kinh nghiệm cho bản thân, từ đó biết phân chia các dạng toán và kỹ thuật giải tương ứng để "đối phó" tốt với mọi loại bài về giải phương trình lượng giác trong đề thi.

Cuốn tài liệu **CÁC KỸ THUẬT PHỔ BIẾN NHẤT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC** được chắt lọc, đánh máy công phu, trình bày đẹp. Nội dung rất hữu ích cho học sinh lớp 11, học sinh ôn thi đại học môn Toán và quý thầy cô giáo dạy Toán THPT. Tài liệu được biên soạn tỉ mỉ, phân chia dạng toán rõ ràng, công thức đầy đủ, mỗi phần đều có ví dụ minh họa và hướng dẫn. Học sinh bị mất gốc kiến thức về lượng giác cũng có thể học lại từ đầu không mấy khó khăn. Hy vọng rằng với cuốn tài liệu hữu ích này, các em học sinh sẽ có một "cẩm nang" để chinh phục phương trình lượng giác trong thi cử.

Tài liệu rất có thể vẫn còn một vài khiếm khuyết, rất mong nhận được ý kiến từ các em học sinh và độc giả.

Giáo viên: NGUYỄN HỮU BIỂN
Facebook: https://www.facebook.com/nguyenhuubien1979
Email: ng.huubien@gmail.com

Phần 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Hàm số y = sinx

+ TXĐ: D = R (*Vì lấy bất kỳ giá trị nào của x, thay vào hàm số ta đều tính được y*)

+ Tập giá trị: [-1 ; 1]

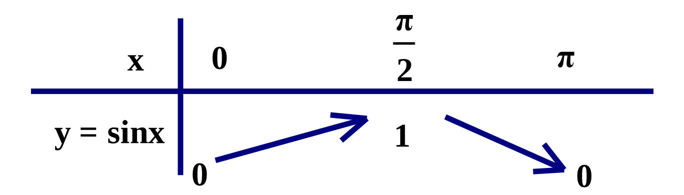
(*Vì các giá trị tính được của y chỉ nằm trong đoạn [-1 ; 1], nghĩa là* $-1 \le \sin x \le 1$)

+ Hàm y = sinx là hàm số lẻ

(*Vì* $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ *và sin(-x) = - sinx: đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O*).

+ Chu kỳ T = 2 (*Vì* $\sin(x+2\ ) = \sin x$ *- Cứ mỗi khi biến số cộng thêm* 2 *thì giá trị hàm số trở về như cũ - đồ thị hàm số lặp lại sau mỗi chu kỳ* 2 *- tính chất này giúp vẽ đồ thị được thuận tiện*)

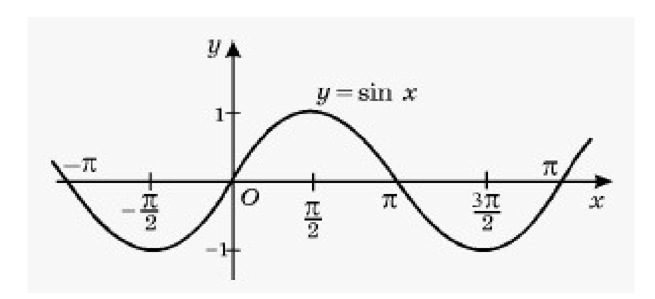
+ Bảng biến thiên trên đoạn $[0;\ ]$ (*trên nửa chu kỳ*)



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y = sinx	0 ↗	1	↘ 0

+ Đồ thị hàm số

Hàm số y = sinx là hàm số lẻ trên R, tuần hoàn với chu kỳ 2 *. Do đó muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số y = sinx trên R, ra chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn* $[0;\ ]$ *(nửa chu kỳ) sau đó lấy đối xứng qua gốc tọa độ O ta được đồ thị trên đoạn* $[-\ ;\ ]$ *(1 chu kỳ), cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái, sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài* $2\ ; 4\ ; 6\ ;...$



Nhận xét:

+ Hàm số y = sinx đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{}{2}+k.2\ ;\frac{}{2}+k.2\ \right)$

+ Hàm số y = sinx nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{}{2}+k.2\ ;\frac{3}{2}+k.2\ \right), k\in Z$

2. Hàm số y = cosx

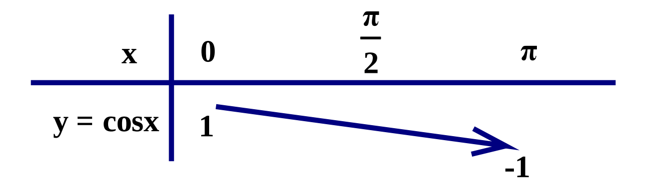
+ TXĐ: D = R (*Vì lấy bất kỳ giá trị nào của x, thay vào hàm số ta đều tính được y*)

+ Tập giá trị: [-1 ; 1] (*Vì các giá trị tính được của y chỉ nằm trong đoạn [-1 ; 1], nghĩa là* $-1\le \cos x\le 1$)

+ Hàm y = cosx là hàm số chẵn (*Vì* $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ *và cos(-x) = cosx: đồ thị đối xứng qua trục tung Oy*).

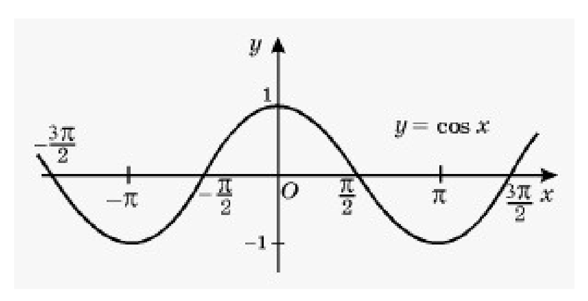
+ Chu kỳ T = 2 (*Vì* $\cos(x+2\ )=\cos x$ *- Cứ mỗi khi biến số cộng thêm* 2 *thì giá trị hàm số trở về như cũ - đồ thị hàm số lặp lại sau mỗi chu kỳ* 2 *- tính chất này giúp vẽ đồ thị được thuận tiện:*)

+ Bảng biến thiên trên đoạn $[0;\ ]$ (*trên nửa chu kỳ*)



+ Đồ thị hàm số

Hàm số y = cosx là hàm số chẵn trên R, tuần hoàn với chu kỳ 2 *. Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = cosx trên R ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn* $[0;\ ]$ *(nửa chu kỳ), sau đó lấy đối xứng đồ thị qua trục Oy ta được đồ thị trên đoạn* $[-\ ;\ ]$ *(1 chu kỳ), cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái, sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài* 2 ;4 ;6 ;...



3. Hàm số y = tanx

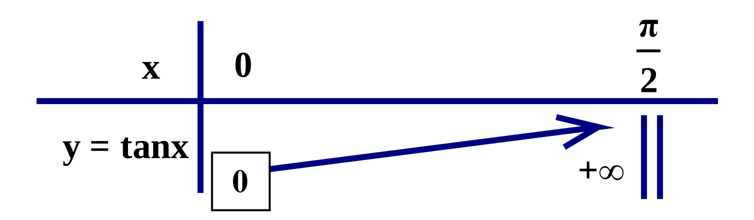
+ TXĐ: $D = R \setminus \left\{ \frac{}{2} + k \quad / k \in Z \right\}$ (Vì $\cos x \neq 0$).

+ Tập giá trị: R

+ Hàm y = tanx là hàm số lẻ (*Vì* $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ *và tan(-x) = - tanx: đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O*).

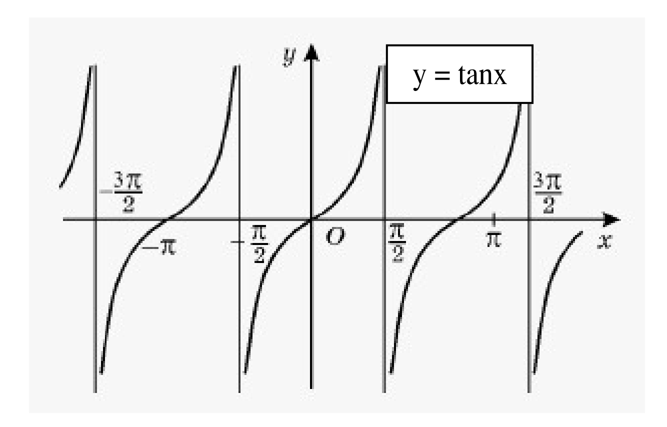
+ Chu kỳ T = (*Vì* $\tan(x + \ ) = \tan x$ *- Cứ mỗi khi biến số cộng thêm thì giá trị hàm số trở về như cũ - đồ thị hàm số lặp lại sau mỗi chu kỳ*)

+ Bảng biến thiên trên đoạn $\left[0; \frac{}{2} \right]$ (nửa chu kỳ)



+ Đồ thị hàm số

Hàm số y = tanx là hàm số lẻ trên $R \setminus \left\{ \frac{}{2} + k \quad / k \in Z \right\}$*, tuần hoàn với chu kỳ* . *Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = tanx trên R ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn* $\left[0; \frac{}{2} \right]$ *(nửa chu kỳ), sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O ta được đồ thị trên đoạn* $\left[-\frac{}{2}; \frac{}{2} \right]$ *(1 chu kỳ), cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái, sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài* ;2 ;3 ;...



Nhận xét:

+ Hàm số y = tanx đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{}{2}+k.\;\;;\frac{}{2}+k.\;\;\right), k\in Z$

+ Hàm số không có khoảng nghịch biến.

+ Mỗi đường thẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm $\left(\frac{}{2}+k.\;\;;0\right)$ gọi là 1 đường tiệm cận của đồ thị hàm số y = tanx (Đồ thị hàm số nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{}{2}+k.$ làm 1 đường tiệm cận)

4. Hàm số y = cotx

+ TXĐ: $D=R\setminus\{k\;\;/k\in Z\}$ (Vì $\sin x\neq 0$) .

+ Tập giá trị: R

+ Hàm y = cotx là hàm số lẻ (*Vì* $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ *và cot(-x) = - cotx: đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O*).

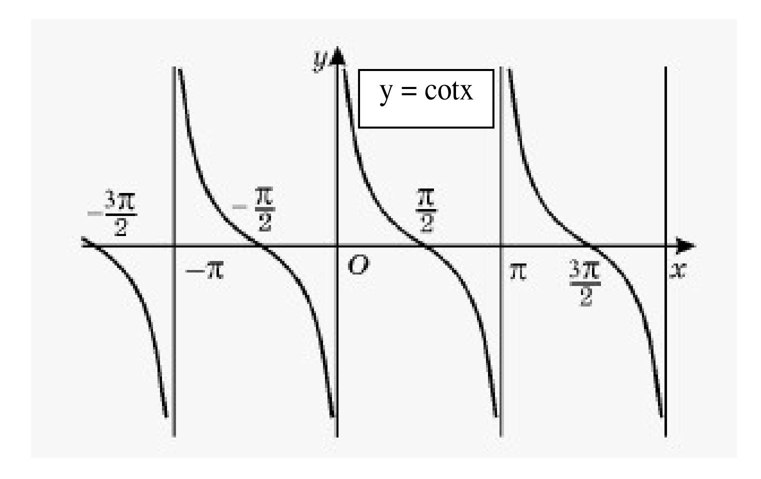
+ Chu kỳ T =   (*Vì* $\cot(x+\;\;)=\cot x$ - *Cứ mỗi khi biến số cộng thêm   thì giá trị hàm số trở về như cũ - đồ thị hàm số lặp lại sau mỗi chu kỳ*   )

+ Bảng biến thiên trên đoạn $\left[0;\frac{}{2}\right]$ (nửa chu kỳ)

x	**0**		$\frac{\pi}{2}$
y = cotx	‖ $+\infty$	↘	**0**

+ Đồ thị hàm số

Hàm số y = tanx là hàm số lẻ trên $R\setminus\{k\;\;/k\in Z\}$*, tuần hoàn với chu kỳ   . Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = tanx trên R ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn* $\left[0;\frac{}{2}\right]$ *(nửa chu kỳ), sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O ta được đồ thị trên đoạn* $\left[-\frac{}{2};\frac{}{2}\right]$ *(1 chu kỳ), cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái, sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài* $;2\;\;;3\;\;;...$



Nhận xét:

+ Hàm số y = tanx nghịch biến trên mỗi khoảng $(k.\ ;\ \ +k.\ )\ k\in Z$

+ Hàm số không có khoảng đồng biến biến.

+ Đồ thị hàm số nhận mỗi đường thẳng $x = k.$ làm 1 đường tiệm cận

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Lý thuyết vận dụng:

+ Hàm số y = sinx có TXĐ: D = R

+ Hàm số y = cosx có TXĐ: D = R

+ Hàm số y = tanx có TXĐ: $D = R\setminus\left\{\frac{}{2}+k\ \ /k\in Z\right\}$ (Vì $\cos x\neq 0$)

+ Hàm số y = cotx có TXĐ: $D = R\setminus\{k\ \ /k\in Z\}$ (Vì $\sin x\neq 0$)

BÀI TẬP: Tìm tập xác định của các hàm số sau

1). $y=\frac{5\cos^2x-\sin x+7}{1-\sin x}$

2). $y=\frac{2\cos x-\sin x+2}{\cos x}$

3). $y=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\cos x}}$

4). $y=\sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos^2x}}$

5). $y=2+\sin 3x+3\cos\frac{x+3}{x-2}$

6). $y=\sin\frac{2x}{x+3}-5\cos\frac{2x}{2x-1}$

7). $y=\tan x+\cot x$

8). $y=\tan(2x+\frac{}{4})$

9). $y=\frac{1+\cos x}{x.\sin x}$

10). $y=\sqrt{2+\sin x+\cos x}$

11). $y=\dfrac{3+tgx}{\sqrt{1+\sin x}}$ 12) $y=2tgx+3\cot g\left(2x-\dfrac{}{3}\right)$

HƯỚNG DẪN

1). Hàm số $y=\dfrac{5\cos^2x-\sin x+7}{1-\sin x}$ xác định khi $1-\sin x\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\dfrac{}{2}+k.2\quad (k\in Z)$

Vậy TXĐ: $D=R\setminus\left\{\dfrac{}{2}+k.2\ ,k\in Z\right\}$

2) Hàm số $y=\dfrac{2\cos x-\sin x+2}{\cos x}$ xác định khi $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{}{2}+k.\quad (k\in Z)$

Vậy TXĐ: $D=R\setminus\left\{\dfrac{}{2}+k.\ ,k\in Z\right\}$

3). Vì $1+\sin x\geq 0$ và $1-\cos x\geq 0$ với mọi x nên $\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}\geq 0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện $1-\cos x\neq 0$. Vậy hàm số $y=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}}$ xác định khi $1-\cos x\neq 0$ hay $\cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k.2$.

Vậy TXĐ: $D=R\setminus\{k.2\ ,k\in Z\}$

4). Vì $1-\cos x\geq 0$ và $\cos^2x\geq 0$ với mọi x nên $\dfrac{1-\cos x}{\cos^2x}\geq 0$ với x thỏa mãn điều kiện $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{}{2}+k.$. Vậy TXĐ: $D=R\setminus\left\{\dfrac{}{2}+k.\ ,k\in Z\right\}$

5). Hàm số $y=2+\sin 3x+3\cos\dfrac{x+3}{x-2}$ xác định $\Leftrightarrow x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$.

Vậy TXĐ: $D=R\setminus\{2\}$

6). Hàm số $y=\sin\dfrac{2x}{x+3}-5\cos\dfrac{2x}{2x-1}$ xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\neq 0\\ 2x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -3\\ x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy TXĐ: $D=R\setminus\left\{-3;\dfrac{1}{2}\right\}$

7). tanx xác định khi và chỉ khi $x\neq\dfrac{}{2}+k.\ ,k\in Z$, cotx xác định khi và chỉ khi $x\neq k.\ ,k\in Z$.

Vậy $y = \tan x + \cot x$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \neq \frac{}{2} + k. \\ x \neq k. \end{cases}$ $(k \in Z)$ hay $x \neq \frac{k.}{2} (k \in Z)$.

TXĐ: $D = R \setminus \left\{ \frac{k.}{2}, k \in Z \right\}$

8). $y = \tan\left(2x + \frac{}{4}\right)$ xác định khi và chỉ khi $2x + \frac{}{4} \neq \frac{}{2} + k.$ hay $x \neq \frac{}{8} + \frac{k.}{2} (k \in Z)$.

Vậy TXĐ: $D = R \setminus \left\{ \frac{}{8} + \frac{k.}{2}, k \in Z \right\}$

9). Biểu thức $y = \frac{1 + \cos x}{x.\sin x}$ có nghĩa khi và chỉ khi: $x.\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = R \setminus \{k \quad / k \in Z\}$

10). Do $2 + \sin x + \cos x = (1 + \sin x) + (1 + \cos x) > 0$

Do đó hàm số $y = \sqrt{2 + \sin x + \cos x}$ được xác định với mọi x. Vậy tập xác định của hàm số là: D = R

11). Biểu thức $y = \frac{3 + tgx}{\sqrt{1 + \sin x}}$ có nghĩa khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x \neq \frac{}{2} + k \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{}{2} + k \\ x \neq -\frac{}{2} + k2 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{}{2} + k$$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = R \setminus \left\{ \frac{}{2} + k \quad / k \in \mathbb{N} \right\}$

12). Biểu thức $y = 2tgx + 3\cot g\left(2x - \frac{}{3}\right)$ có nghĩa khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x \neq \frac{}{2} + k \\ 2x - \frac{}{3} \neq k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{}{2} + k \\ x \neq \frac{}{6} + k\frac{}{2} \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là:

$D = D \setminus A \cup B$ với $A = \left\{ x / x \neq \frac{}{2} + k \right\}$ và $B = \left\{ x / x \neq \frac{}{6} + k\frac{}{2} \right\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\ \ ,k\in\mathbb{Z}$..

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\ \ ,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 2. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sin x}{\cos\left(x-\ \ \right)}$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\ \ \right)\neq 0\Leftrightarrow x-\ \ \neq\frac{}{2}+k\ \ \Leftrightarrow x\neq\frac{3}{2}+k\ \ ,k\in\mathbb{Z}.$$

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}+k\ \ ,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 3. Tìm tập xác định của hàm số $y=\tan\left(5x+\dfrac{2}{3}\right)$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow \cos\left(5x+\frac{2}{3}\right)\neq 0\Leftrightarrow 5x+\frac{2}{3}\neq\frac{}{2}+k\ \ \Leftrightarrow x\neq-\frac{}{30}+k\frac{}{5},k\in\mathbb{Z}.$$

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{}{30}+k\dfrac{}{5},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 4. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2+\cos x}{1-\sin x}$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\dfrac{}{2}+k2\ \ ,k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{}{2}+k2\ \ ,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 5. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2+\cos x}{2-\sin x}$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x\neq 2$ (luôn thoả với mọi x).

Tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Bài 6. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{\cos x+1}}$.

Hướng dẫn: Ta có $-1\leq\sin x\leq 1$ và $-1\leq\cos x\leq 1$ nên $2+\sin x>0$ và $\cos x+1\geq 0$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2+\sin x}{\cos x+1}\geq 0\ (\text{luôn thoả})\\ \cos x+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\cos x\neq -1\Leftrightarrow x\neq\ \ +k\ \ ,k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\ \ +k\ \ ,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 7. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{5-3\cos 2x}{\left|1+\sin\left(2x-\dfrac{}{2}\right)\right|}}$.

Hướng dẫn: Ta có $-1\le\cos 2x\le 1$ nên $5-3\cos 2x>0$.

Mặt khác $\left|1+\sin\left(2x-\dfrac{}{2}\right)\right|\ge 0$.

Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5-3\cos 2x}{\left|1+\sin\left(2x-\dfrac{}{2}\right)\right|}\ge 0(\text{luôn thoả})\\ 1+\sin\left(2x-\dfrac{}{2}\right)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\sin\left(2x-\dfrac{}{2}\right)\ne -1\Leftrightarrow 2x-\dfrac{}{2}\ne-\dfrac{}{2}+k2\quad\Leftrightarrow x\ne k\quad ,k\in\mathbb{Z}.$$

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\quad ,k\in\mathbb{Z}\}$.

Bài 8. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1+\cot\left(\dfrac{}{3}+x\right)}{\tan^2\left(3x-\dfrac{}{4}\right)}$.

Hướng dẫn:

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(\dfrac{}{3}+x\right)\ne 0\\ \cos\left(3x-\dfrac{}{4}\right)\ne 0\\ \tan^2\left(3x-\dfrac{}{4}\right)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{}{3}+x\ne k\\ 3x-\dfrac{}{4}\ne\dfrac{}{2}+k\\ 3x-\dfrac{}{4}\ne k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-\dfrac{}{3}+k\\ x\ne\dfrac{}{4}+k\dfrac{}{3}\\ x\ne\dfrac{}{12}+k\dfrac{}{3}\end{cases},k\in\mathbb{Z}.$

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{}{3}+k\quad ,\dfrac{}{4}+k\dfrac{}{3},\dfrac{}{12}+k\dfrac{}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 9. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1-\tan 4x}{2\sin x-\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn:

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 4x\ne 0\\ \sin x\ne\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x\ne\dfrac{}{2}+k\\ x\ne\dfrac{}{4}+k2\\ x\ne\dfrac{3}{4}+k2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne\dfrac{}{8}+k\dfrac{}{4}\\ x\ne\dfrac{}{4}+k2\\ x\ne\dfrac{3}{4}+k2\end{cases},k\in\mathbb{Z}.$

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{}{8}+k\dfrac{}{4},\dfrac{}{4}+k2\quad ,\dfrac{3}{4}+k2\quad ,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Bài 10. Tìm tập xác định của hàm số $y=\cot\left(x+\frac{}{6}\right)+\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

Hướng dẫn: Vì $-1\le\cos x\le 1$ nên $1+\cos x\ge 0$ và $1-\cos x\ge 0\Rightarrow\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\ge 0$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(x+\frac{}{6}\right)\ne 0\\ 1-\cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{}{6}\ne k\\ x\ne k2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-\frac{}{6}+k\\ x\ne k2\end{cases},k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{}{6}+k\ \ ,k2\ \ ,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 11. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2+\sin x}-\frac{1}{\tan^2 x-1}$.

Hướng dẫn: Vì $-1\le\sin x\le 1$ nên $2+\sin x\ge 0$.
Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2+\sin x\ge 0\left(\text{luôn thoả}\right)\\ \tan^2 x-1\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\tan x\ne\pm 1\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne\pm\frac{}{4}+k\\ x\ne\frac{}{2}+k\end{cases},k,m\in\mathbb{Z}.$$

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{}{4}+k\ \ ,\frac{}{2}+k\ \ ,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 12. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{1+\tan\left(\frac{}{3}+2x\right)}{\cot^2 x+1}$.

Hướng dẫn: Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cot^2 x+1\ne 0\left(\text{luôn thoả}\right)\\ \cos\left(\frac{}{3}+2x\right)\ne 0\\ \sin x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{}{3}+2x\ne\frac{}{2}+k\\ x\ne k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne\frac{}{12}+k\frac{}{2}\\ x\ne k\end{cases},k\in\mathbb{Z}.$$

Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{}{12}+k\frac{}{2},k\ \ ,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Dạng 2: TÌM CHU KỲ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC
Lý thuyết vận dụng:

+ Hàm số y = sinx và y = cosx tuần hoàn với chu kỳ $\mathbf{T=2}$

Mở rộng: Hàm số y = sin(ax + b) và y = cos(ax + b) tuần hoàn với chu kỳ: $\mathbf{T=\frac{2}{|a|}}$

+ Hàm số y = tanx và y = cotx tuần hoàn với chu kỳ $\mathbf{T=}$

Mở rộng: Hàm số y = tan(ax + b) và y = cot(ax + b) tuần hoàn với chu kỳ $\mathbf{T = \frac{}{|a|}}$

+ Nếu hàm số f(x) có chu kỳ T_1, hàm số g(x) có chu kỳ T_2 thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ có chu kỳ $T = k.BCNN(T_1; T_2)$

Bài 1: Chứng minh hàm số y = f(x) = sin2x tuần hoàn với chu kỳ $T =$, tức là:

$f(x + \ ) = f(x), \forall x$ (*) và $T =$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (*)

Hướng dẫn

HS y = f(x) = sin2x có TXĐ: D = R. $\forall x \in D$, ta có:

$\mathbf{f(x + \ ) = \sin 2(x + \ ) = \sin(2x + 2\ ) = \sin 2x = f(x)}$.

Giả sử có số $\mathbf{T_0}$ sao cho: $\mathbf{0 < T_0 <}$ và $\mathbf{f(x + T_0) = f(x), \forall x}$.

Cho $\mathbf{x = \frac{}{4}}$, ta được: $\mathbf{\sin 2(\frac{}{4} + T_0) = \sin 2.\frac{}{4} \Rightarrow \sin(\frac{}{2} + 2T_0) = \sin\frac{}{2} = 1}$

$\mathbf{\Rightarrow \frac{}{2} + 2T_0 = \frac{}{2} + k.2\ \ (k \in Z) \Rightarrow T_0 = k.\ \ (k \in Z)}$. Điều này trái với giả thiết $\mathbf{0 < T_0 <}$

Nghĩa là $\mathbf{T =}$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $\mathbf{f(x + T) = f(x), \forall x}$.

Vậy y = sin2x là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\mathbf{T =}$.

Bài 2: Tìm chu kỳ của các hàm số sau

1). $\mathbf{y = 2\sin^2 3x}$

2). $\mathbf{y = 4\cos^2(5x + \frac{}{6})}$

3). $\mathbf{y = \tan(3x - 2)}$

4). $\mathbf{y = \cot(-5x + \frac{}{4})}$

5). $y = \sin\left(\frac{}{3} - x\right) + \tan\left(\frac{x}{3}\right)$

6). $y = \dfrac{2\tan 4x}{1 - \dfrac{1 - \cos 8x}{1 + \cos 8x}}$

Hướng dẫn

1). $\mathbf{y = 2\sin^2 3x = 1 - \cos 6x}$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $\mathbf{T = \frac{2}{6} = \frac{}{3}}$

2). $\mathbf{y = 4\cos^2(5x + \frac{}{6}) = 2 + 2\cos(10x + \frac{}{3})}$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $\mathbf{T = \frac{2}{10} = \frac{}{5}}$

3). $\mathbf{y = \tan(3x - 2)}$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\mathbf{T = \frac{}{3}}$

4). $\mathbf{y = cot(-5x + \frac{}{4})}$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\mathbf{T = \frac{}{|-5|} = \frac{}{5}}$

5). Ta thấy hàm số $f(x) = \sin\left(\frac{}{3} - x\right)$ có chu kỳ $T_1 = 2$. Hàm số $g(x) = \tan\left(\frac{x}{3}\right)$ có chu kỳ $T_2 = 3$. Vậy hàm số y co chu kỳ $T = 6$

6). Ta có :

$$y = \frac{2\tan 4x}{\frac{1+\cos 8x - 1 + \cos 8x}{1+\cos 8x}} = \frac{\tan 4x(1+\cos 8x)}{\cos 8x} = \frac{\frac{\sin 4x}{\cos 4x}.2\cos^2 4x}{\cos 8x} = \frac{2\sin 4x.\cos 4x}{\cos 8x} = \frac{\sin 8x}{\cos 8x} = \tan 8x$$

Vậy hàm số y có chu kỳ $T = \frac{}{8}$

Dạng 3: XÉT TÍNH CHẴN - LẺ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Lý thuyết vận dụng:

+ Cho hàm số y = f(x) với tập xác định D. Hàm số f gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D, ta có x cũng thuộc D (D là tập đối xứng) và f(-x) = f(x)

+ Cho hàm số y = f(x) với tập xác định D. Hàm số f gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D, ta có x cũng thuộc D (D là tập đối xứng) và f(-x) = -f(x)

BÀI TẬP: Xét tính chẵn - lẻ của các hàm số sau

1). $\mathbf{y = \lvert x \rvert + \cos 5x}$	2). $\mathbf{y = 3\cos x + \sin^2 x}$
3). $\mathbf{y = \sin^2 x.\sin 2x}$	4). $\mathbf{y = \frac{cotx}{1+\cos^2 x}}$
5). $f(x) = 3\sin x - 2$	6). $f(x) = \sin x - \cos x$
7). $f(x) = \sin x.\cos^2 x + \tan x$	8). $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$

Hướng dẫn

1) Hàm số $\mathbf{y = f(x) = \lvert x \rvert + \cos 5x}$ có TXĐ: D = R. Ta có $\mathbf{x \in D \Rightarrow -x \in D}$.

$\mathbf{\forall x \in D, f(-x) = \lvert -x \rvert + \cos(-5x) = \lvert x \rvert + \cos 5x = f(x)}$. Vậy f(x) là hàm số chẵn.

2) Hàm số $\mathbf{y = f(x) = 3\cos x + \sin^2 x}$ có TXĐ: D = R. Ta có $\mathbf{x \in D \Rightarrow -x \in D}$.

$\mathbf{\forall x \in D, f(-x) = 3\cos(-x) + \sin^2(-x) = 3\cos x + (-\sin x)^2 = 3\cos x + \sin^2 x = f(x)}$.

Vậy f(x) là hàm số chẵn.

3) Hàm số $\mathbf{y = \sin^2 x.\sin 2x}$ có TXĐ: D = R. Ta có $\mathbf{x \in D \Rightarrow -x \in D}$.

$\forall x \in D, f(-x) = \sin^2(-x).\sin(-2x) = -\sin^2 x.\sin 2x = -f(x)$. Vậy $y = f(x) = \sin^2 x.\sin 2x$ là hàm số lẻ.

4) Hàm số $y = f(x) = \frac{\cot x}{1+\cos^2 x}$ có TXĐ: $D = R\setminus\{k. \ \ /k \in Z\}$. Ta có $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$\forall x \in D, f(-x) = \frac{\cot(-x)}{1+\cos^2(-x)} = -\frac{\cot x}{1+\cos^2 x} = -f(x)$. Vậy f(x) là hàm số lẻ.

5). TXĐ: D = R. Ta có $x \in D \Rightarrow -x \in D$. Xét $f(-x) = -3\sin x - 2 \Rightarrow \begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$.

Vậy f(x) không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ.

6). TXĐ: D = R. Ta có $x \in D \Rightarrow -x \in D$. Xét $f(-x) = -\sin x - \cos x \Rightarrow \begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$

Vậy f(x) không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ.

7). TXĐ: D = R. Ta có $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Xét $f(-x) = -\sin x.\cos^2 x - \tan x = -\left(\sin x.\cos^2 x + \tan x\right) = -f(x)$

Vậy f(x) là hàm số lẻ.

8). Vậy f(x) không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ.

Dạng 4: TÌM MIN - MAX CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Lý thuyết vận dụng:

Ta có: $-1 \le \sin(ax+b) \le 1, \forall x \in R, -1 \le \cos(ax+b) \le 1, \forall x \in R$

BÀI TẬP: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

1). $y = 2\cos(x + \frac{}{3}) + 3$ 2). $y = 4\sin\sqrt{x}$

3). $y = 3 + \frac{1}{4}\sin x \cos x$ 4). $y = \sqrt{1+\sin x} - 3$

5). $y = \sqrt{1-\sin\left(x^2\right)} - 1$ 6). f(x) = $\sqrt{9-\sin^2 2x}$

7). f(x) = $2\cos^2 x - \cos x + 1$ 8). f(x) = $\sin^2 x - 4\sin x - 2$

Hướng dẫn

1). $\forall x$, ta có: $-1 \le \cos\left(x + \frac{}{3}\right) \le 1$ nên

$-2 \le 2\cos\left(x+\frac{}{3}\right) \le 2 \Leftrightarrow 1 \le 2\cos\left(x+\frac{}{3}\right) + 3 \le 5 \Leftrightarrow 1 \le y \le 5$

$\Rightarrow y_{min} = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1, y_{max} = 5 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

2). $\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, ta có: $\mathbf{-1 \leq \sin\sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4\sin\sqrt{x} \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 4}$.

$\Rightarrow y_{min} = -4 \Leftrightarrow \sin\sqrt{x} = -1, y_{max} = 5 \Leftrightarrow \sin\sqrt{x} = 1$

3). Ta có: $\mathbf{y = 3 + \frac{1}{4}\sin x\cos x = 3 + \frac{1}{8}\sin 2x}$. $\forall \mathbf{x}$, ta có: $\mathbf{-1 \leq \sin 2x \leq 1}$ nên:

$\mathbf{-\frac{1}{8} \leq \frac{1}{8}\sin 2x \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{8} \leq 3 + \frac{1}{8}\sin 2x \leq 3 + \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{23}{8} \leq y \leq \frac{25}{8}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của y là $\mathbf{\frac{25}{8}}$ đạt được khi: sin2x = 1

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $\mathbf{\frac{23}{8}}$ đạt được khi: sin2x = -1

4). $\forall \mathbf{x}$, ta có:

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1 + \sin x} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{1 + \sin x} - 3 \leq \sqrt{2} - 3$

$\Leftrightarrow -3 \leq y \leq \sqrt{2} - 3$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $\mathbf{\sqrt{2} - 3}$ đạt được khi: sinx = 1

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là -3 đạt được khi: sinx = -1

5). Hàm số: $y = \sqrt{1 - \sin\left(x^2\right)} - 1$ có tập xác định là $D = R$

Với mọi $x \in R$ ta luôn có: $-1 \leq \sqrt{1 - \sin\left(x^2\right)} - 1 \leq \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \sqrt{2} - 1$.

$*) y_{max} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sin\left(x^2\right) = -1$; $*) y_{min} = -1$ xảy ra khi: $\sin\left(x^2\right) = 1$

6). Do $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow 9 - \sin^2 2x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

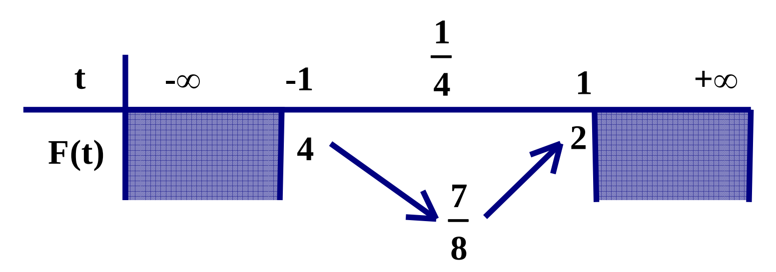
Vậy hàm số f(x) = $\sqrt{9 - \sin^2 2x}$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$

$\Rightarrow 8 < 9 - \sin^2 2x \leq 9, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y_{min} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \sin^2 x = 1, y_{max} = 3 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0$

7). Hàm số f(x) = $2\cos^2 x - \cos x + 1$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$. Đặt t = cosx, khi đó $-1 \leq t \leq 1$

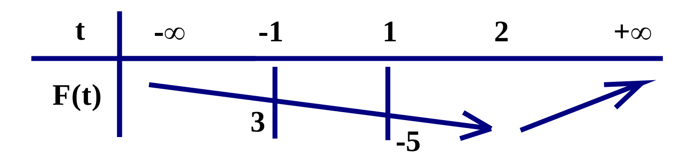
Xét hàm số F(t) = $2t^2 - t + 1$ và có bảng biến thiên sau:



Từ đó ta có: $\Rightarrow y_{max} = 4 \Leftrightarrow \cos x = -1, y_{min} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4}$

8). Hàm số f(x) = $\sin^2 x - 4\sin x - 2$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$. Đặt t =sinx, khi đó $-1 \le t \le 1$.

Ta có: $F(t) = t^2 - 4t - 2$

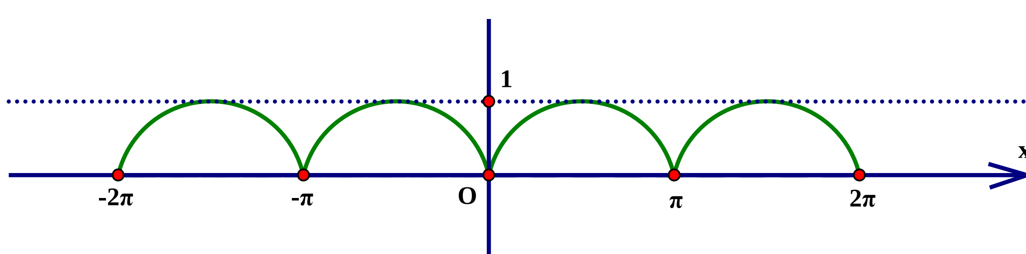


$\Rightarrow y_{max} = 3 \Leftrightarrow \sin x = -1, y_{min} = -5 \Leftrightarrow \sin x = 1$

Dạng 5: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1: Dựa vào đồ thị hàm số y = sinx, vẽ đồ thị của hàm số $\mathbf{y = |\sin x|}$

Hướng dẫn



Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có: $|\sin x| = \begin{cases} \sin x \text{ nếu } \sin x \ge 0 \\ -\sin x \text{ nếu } \sin x < 0 \end{cases} (y \ge 0)$

Như vậy, đồ thị hàm số $\mathbf{y = |\sin x|}$ trên trục số được suy ra bằng cách như sau:

+ Phần đồ thị với $\mathbf{\sin x \ge 0}$ thì lấy bằng chính nó (giữ nguyên) (Vì $|\sin x| = \sin x$ **nếu** $\sin x \ge 0$)

+ Phần đồ thị với $\mathbf{\sin x < 0}$ thì lấy đối xứng qua trục hoành (Vì $|\sin x| = -\sin x$ **nếu** $\sin x < 0$)

Bài 2: Vẽ đồ thị hàm số y = sin2x.

+ Suy ra đồ thị hàm số $y = |\sin 2x|$.

+ Tìm các khoảng đồng biên - nghịch biến của hàm số y = sin2x.

+ Tìm các khoảng để hàm số y = sin2x nhận giá trị dương - giá trị âm.

Hướng dẫn

* Ý 1: Vẽ đồ thị hàm số y = sin2x

+ TXĐ: R

+ Chu kỳ $T = \frac{2}{|2|} =$

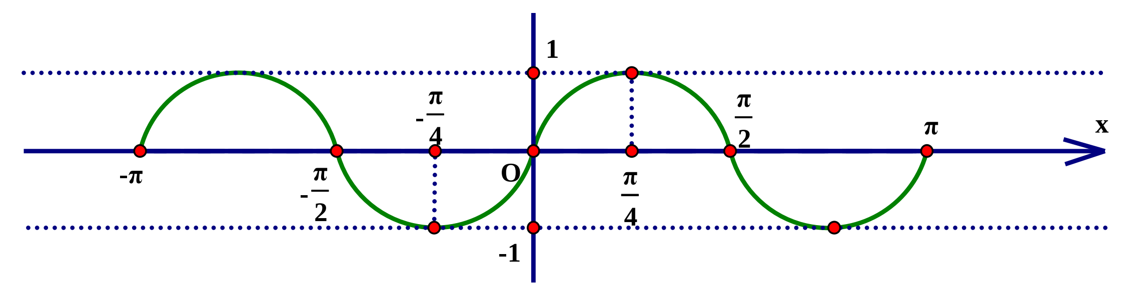
+ Hàm số y = sin2x là hàm lẻ, đồ thị hàm số đối xứng nhau qua gốc tọa độ

+ Xét BBT của hàm số y = sin2x trên nửa chu kỳ $\left[0; \frac{}{2}\right]$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y = sin2x	0 ↗	1 ↘	0

(Hàm số y = sin2x trên nửa chu kỳ $\left[0; \frac{}{2}\right]$ là hàm số y = sinx trên nửa chu kỳ $[0; \ ]$)

+ Đồ thị hàm số



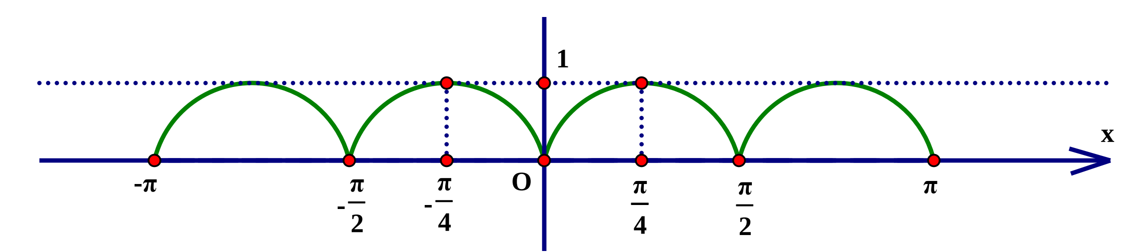
* Ý 2: Suy ra đồ thị hàm số $y = |\sin 2x|$

+ Vì $y = |\sin 2x| \geq 0$ nên đồ thị hàm số $y = |\sin 2x|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = \sin 2x$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \sin 2x$ với $y \geq 0$

- Lấy đối xứng phần còn lại qua trục Ox

Ta có đồ thị như hình bên dưới:



* Ý 3:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{}{4}+k\ ;\frac{}{4}+k\ \right),k\in Z$

+ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{}{4}+k\ ;\frac{3}{4}+k\ \right),k\in Z$

* Ý 4:

+ $y\geq 0$ trên các khoảng $\left(k\ ;\frac{}{2}+k\ \right),k\in Z$

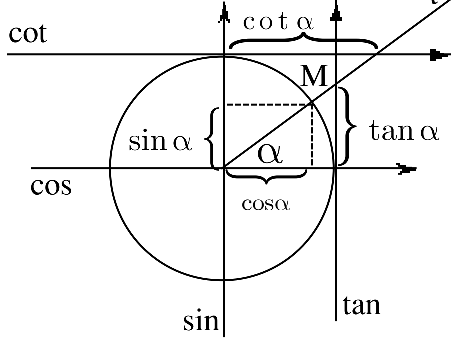
+ $y\leq 0$ trên các khoảng $\left(-\frac{}{2}+k\ ;k\ \right),k\in Z$

Phần 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. NHẮC LẠI CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CẦN NHỚ

1. Cách nhớ các trục lượng giác

+ cosin là trục nằm ngang
+ song song với nó có chàng cot
+ còn sin thì đứng thẳng băng
+ đối diện với nó có tan đứng chờ



- $-1 \le \sin \quad \le 1, \forall$
- $-1 \le \cos \quad \le 1, \forall$
- $\sin(\quad + k2 \quad) = \sin \quad , k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(\quad + k2 \quad) = \cos \quad , k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(\quad + k \quad) = \tan \quad , k \in \mathbb{Z}$
- $\cot(\quad + k \quad) = \cot \quad , k \in \mathbb{Z}$

2. Sáu công thức cơ bản

(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	(4) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
(2) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	(5) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
(3) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	(6) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

3. Công thức cộng - trừ:

cos thì cos cos sin sin
sin thì sin cos cos sin rõ ràng
cos thì đổi dấu hỡi chàng
sin thì giữ dấu xin nàng nhớ cho
tan tổng thì lấy tổng tan, chia một trừ tích với tan - dễ mà

(1) $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ (2) $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$ (3) $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$ (4) $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$	(5) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$ (6) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$

4. Công thức biến đổi tổng thành tích:

cos + cos = 2cos.cos
cos - cos = -2sinsin
sin + sin = 2sin.cos
sin - sin = 2cos.sin

$$(1)\ \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$(2)\ \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$(3)\ \sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$(4)\ \sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

Tình mình cộng với tình ta, sinh ra hai đứa con mình con ta
Tình mình hiệu với tình ta, sinh ra hiệu chúng, con ta con mình

$$(5)\ \tan a + \tan b = \frac{\sin\left(a+b\right)}{\cos a.\cos b}$$

$$(6)\ \tan a - \tan b = \frac{\sin\left(a-b\right)}{\cos a.\cos b}$$

5. Công thức biến đổi tích thành tổng:

Suy ra từ công thức tổng thành tích

"cos cos nửa cos-cộng, cộng cos-trừ

sin sin nửa cos-trừ, trừ cos-cộng

sin cos nửa sin-cộng, cộng sin-trừ".

$$(1)\ \cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)+\cos\left(a-b\right)\right]$$

$$(2)\ \sin a.\sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)-\cos\left(a-b\right)\right]$$

$$(3)\ \sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)+\sin\left(a-b\right)\right]$$

$$(4)\ \cos a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)-\sin\left(a-b\right)\right]$$

(có công thức (3), có thể không cần công thức (4) hoặc ngược lại)

6. Công thức góc nhân đôi:

$$(1)\ \sin 2a = 2\sin a.\cos a$$

$$(2)\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

7. Công thức hạ bậc hai:

Suy ra từ công thức góc nhân đôi

$$(1)\ \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad (2)\ \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

8. Công thức góc nhân ba:

Nhân ba một góc bất kỳ
sin thì ba bốn, cos thì bốn ba
dấu trừ đặt giữa hai ta, lập phương chỗ bốn, thế là ok.

$$(1)\ \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \qquad (2)\ \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

9. Công thức hạ bậc ba:

Suy ra từ công thức góc nhân ba.

$$(1)\ \sin^3 a = \frac{1}{4}\left(3\sin a - \sin 3a\right) \quad (2)\ \cos^3 a = \frac{1}{4}\left(3\cos a + \cos 3a\right)$$

10. Công thức biểu diễn $\sin x, \cos x, \tan x$ qua $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

sin, cos mẫu giống nhau chả khác
ai cũng là một cộng bình tê $(1+t^2)$
sin thì tử có hai tê (2t),
cos thì tử có 1 trừ bình tê $(1-t^2)$.

$(1)\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$	$(3)\ \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$
$(2)\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$(4)\ \cot x = \dfrac{1-t^2}{2t}$

Nếu đặt $t = \tan x$

$(1)\ \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$	$(3)\ \tan 2x = \dfrac{2t}{1-t^2}$
$(2)\ \cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$(4)\ \cot 2x = \dfrac{1-t^2}{2t}$

11. Công thức liên hệ của các góc (cung) liên quan đặc biệt:

cos đối , sin bù, phụ chéo, khác π *tan (thì bằng nhau - còn lại đối nhau)*

(1) Góc đối: $\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$ **(2) Góc bù:** $\begin{cases} \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$

(3) Góc phụ: $\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha \end{cases}$ **(4) Góc sai kém** π **:** $\begin{cases} \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha \\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \\ \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha \end{cases}$

Hai góc hơn kém nhau $\frac{}{2}$ (*sin chéo - cos bằng, còn lại chéo đối*)	
• $\sin\left(+\frac{}{2}\right)=\cos$	• $\tan\left(+\frac{}{2}\right)=-\cot$
• $\cos\left(+\frac{}{2}\right)=-\sin$	• $\cot\left(+\frac{}{2}\right)=-\tan$

12. Công thức bổ sung:

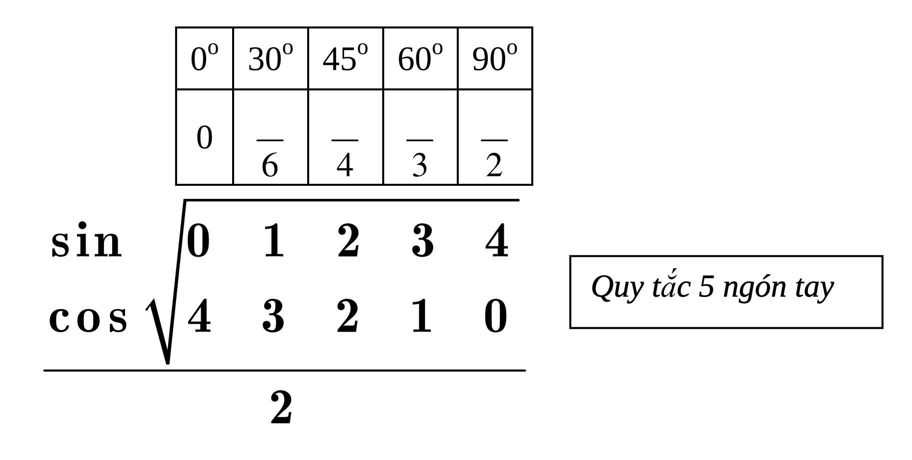
(1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

13. Bảng giá trị của hàm số lượng giác của các góc cung đặc biệt:

HS	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
	0	$\frac{}{6}$	$\frac{}{4}$	$\frac{}{3}$	$\frac{}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{3}{2}$	2
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	||	0
cot	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	||	0	||



0°	30°	45°	60°	90°
0	$\frac{\ }{6}$	$\frac{\ }{4}$	$\frac{\ }{3}$	$\frac{\ }{2}$

sin	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
cos	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**

(All under $\sqrt{\ }$, divided by **2**)

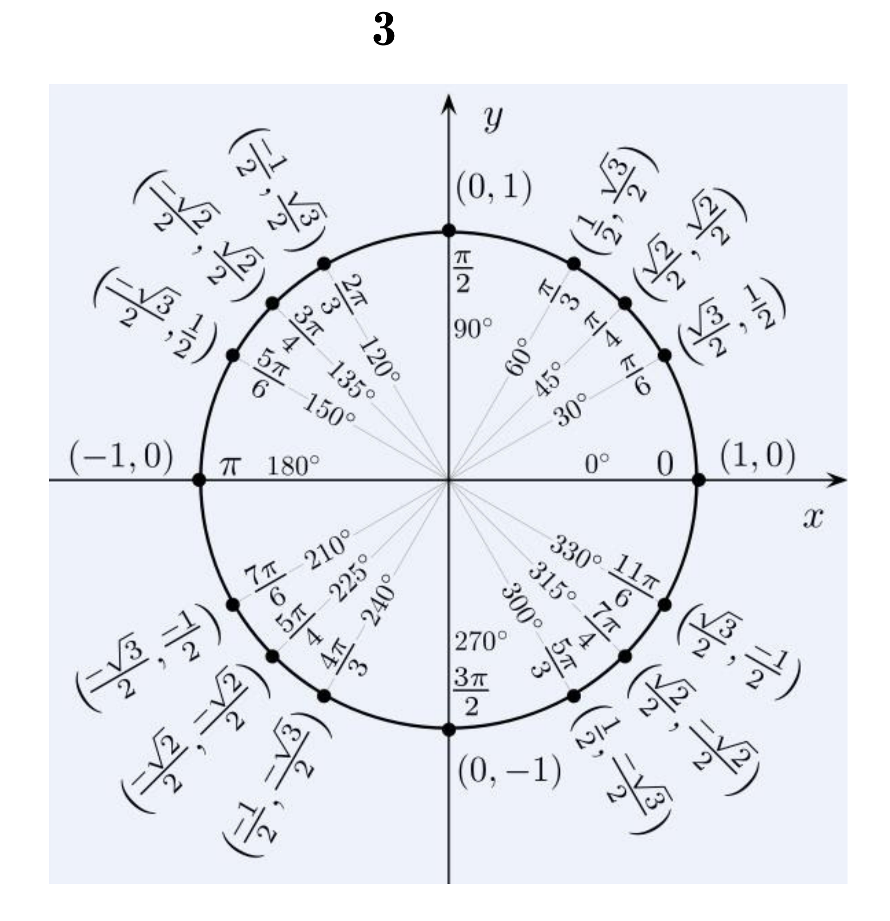
Quy tắc 5 ngón tay

0°	30°	45°	60°	90°
0	$\frac{\ }{6}$	$\frac{\ }{4}$	$\frac{\ }{3}$	$\frac{\ }{2}$

tan	**0**	**3**	**9**	**27**	**||**
cot	**||**	**27**	**9**	**3**	**0**

(All under $\sqrt{\ }$, divided by **3**)

Đầu voi - đuôi chuột
Ở giữa gấp ba



II. CÁC KỸ THUẬT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình sinx = a.

a) Nếu $|\mathbf{a}| > \mathbf{1}$: Phương trình vô nghiệm

b) Nếu $|\mathbf{a}| \le \mathbf{1}$: Đưa phương trình về dạng: sinx = sin $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{x} = \quad + \mathbf{k.2} \\ \mathbf{x} = \quad - \quad + \mathbf{k.2} \end{array}\right.$ $(\mathbf{k} \in \mathbf{Z})$

* Các trường hợp đặc biệt:

+ sinx = 0 $\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{k.}$ $(\mathbf{k} \in \mathbf{Z})$

+ sinx = 1 $\Leftrightarrow \mathbf{x} = \frac{}{\mathbf{2}} + \mathbf{k.2}$ $(\mathbf{k} \in \mathbf{Z})$

+ sinx = -1 $\Leftrightarrow \mathbf{x} = -\frac{}{\mathbf{2}} + \mathbf{k.2}$ $(\mathbf{k} \in \mathbf{Z})$

Ví dụ: Giải các phương trình sau

1). $\sin\left(\frac{x+}{5}\right) = -\frac{1}{2}$

+ Ta có $\sin\left(\frac{x+}{5}\right) = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+}{5} = -\frac{}{6} + k2 \\ \frac{x+}{5} = \quad + \frac{}{6} + k2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{11}{6} + k10 \\ x = \frac{29}{6} + k10 \end{array}\right.$ $(k \in Z)$

2). $\sin 2x = 1 - \sqrt{3}$

+ Ta thấy $-1 \le 1 - \sqrt{3} \le 1$, đặt $1 - \sqrt{3} = \sin \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \quad + k2 \\ 2x = \quad - \quad + k2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = ... \\ x = ... \end{array}\right.$

3). $\sin\left(2x - \frac{}{5}\right) = \sin\left(\frac{}{5} + x\right)$

+ $\sin\left(2x - \frac{}{5}\right) = \sin\left(\frac{}{5} + x\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{}{5} = \frac{}{5} + x + k2 \\ 2x - \frac{}{5} = \quad - \left(\frac{}{5} + x\right) + k2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{5} + k2 \\ x = \frac{}{3} + k\frac{2}{3} \end{array}\right.$

4). $\sin\left(x + 20^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

+ $\sin\left(x + 20^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 20^0 = 60^0 + k.360^0 \\ x + 20^0 = 180^0 - 60^0 + k.360^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40^0 + k.360^0 \\ x = 100^0 + k.360^0 \end{array}\right.$

2. Phương trình cosx = a

a) Nếu $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm

b) Nếu $|a| \le 1$: Đưa phương trình về dạng: cosx = sin $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \quad + k.2 \\ x = - \quad + k.2 \end{array}\right.$ $(k \in Z)$

* Các trường hợp đặc biệt:

+ cosx = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{}{2} + k. \ (k \in Z)$

+ cosx = 1 $\Leftrightarrow x = k.2 \ (k \in Z)$

+ cosx = -1 $\Leftrightarrow x = \quad + k.2 \ (k \in Z)$

Ví dụ: Giải các phương trình sau

1). $\cos\frac{x}{2} = \cos\sqrt{2}$

+ $\cos\frac{x}{2} = \cos\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \pm\sqrt{2} + k2 \quad \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2} + k4$

2). $\cos\left(x + \frac{}{18}\right) = \frac{2}{5}$

+ Ta thấy $-1 \le \frac{2}{5} \le 1$, đặt $\frac{2}{5} = \cos \quad \Rightarrow x + \frac{}{18} = \pm \quad + k2 \quad \Leftrightarrow x = \pm \quad - \frac{}{18} + k2$

3). $\cos(x-5) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

+ $\cos(x-5) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{}{6} \Rightarrow x - 5 = \pm\frac{}{6} + k2 \quad \Leftrightarrow x = 5 \pm \frac{}{6} + k2$

4). $\cos\left(x + 60^0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

+ $\cos\left(x + 60^0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x + 60^0 = \pm 45^0 + k.360^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -15^0 + k.360^0 \\ x = -105^0 + k.360^0 \end{array}\right.$

5). $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

+ $\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{}{2} + k \quad \Leftrightarrow x = \frac{}{4} + k\frac{}{2}$

6). $\sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

+ $\sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 1-\sqrt{3} \in [-1;1] \Leftrightarrow 2x = \pm \ \ + k2 \ $, với $\cos \ \ = 1-\sqrt{3}$

3. Phương trình tanx = a. Điều kiện $x \ne \frac{}{2} + k. \ (k \in Z)$

+ Đưa phương trình về dạng: $\tan x = \tan \ \ \Leftrightarrow x = \ \ + k. \ (k \in Z)$

* Các trường hợp đặc biệt:

+ tanx = 0 $\Leftrightarrow x = k. \ (k \in Z)$

+ tanx = 1 $\Leftrightarrow x = \frac{}{4} + k \ (k \in Z)$

+ tanx = -1 $\Leftrightarrow x = -\frac{}{4} + k \ (k \in Z)$

Ví dụ: Giải các phương trình sau

1). $\tan 3x = \tan \frac{3}{5}$

+ ĐK: $\cos 3x \ne 0$, $\tan 3x = \tan \frac{3}{5} \Rightarrow 3x = \frac{3}{5} + k \ \ \Leftrightarrow x = \frac{}{5} + k\frac{}{3}$

2). $\tan(x - 15^0) = 5$

3). $\tan(2x-1) = \sqrt{3}$

+ ĐS: $\tan(2x-1) = \sqrt{3} = \tan\frac{}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{}{6} + k\frac{}{6}$

4). $\sin x = \cos x$

+ $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{}{4} + k$

5). sinx + cosx = 0

+ sinx + cosx = 0 $\Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{}{4} + k$

4. Phương trình cotx = a. Điều kiện $x \ne k. \ (k \in Z)$

+ Đưa phương trình về dạng: $\cot x = \cot \ \ \Leftrightarrow x = \ \ + k. \ (k \in Z)$

* Các trường hợp đặc biệt:

+ cotx = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{}{2} + k \ (k \in Z)$

+ cotx = 1 $\Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{}{4} + k \quad (k \in Z)}$

+ cotx = -1 $\Leftrightarrow \mathbf{x = -\frac{}{4} + k \quad (k \in Z)}$

Ví dụ: Giải các phương trình sau

1). $\cot 3x = 1$

+ ĐK: $\cos 3x \neq 0$

+ $\cot 3x = 1 \Rightarrow 3x = \frac{}{4} + k \quad \Leftrightarrow x = \frac{}{12} + k\frac{}{3}$

2). $\cot 4x = \cot\frac{2}{7}$

+ ĐK: $\cos 4x \neq 0$

+ $\cot 4x = \cot\frac{2}{7} \Rightarrow 4x = \frac{2}{7} + k \quad \Leftrightarrow x = \frac{}{14} + k\frac{}{4}$

3). $\cot 3x = -2$

+ ĐK: $\cos 3x \neq 0$

+ $\cot 3x = -2 \Rightarrow 3x = \quad + k \quad \Leftrightarrow x = \frac{}{3} + k\frac{}{3}$, với $\cot \quad = -2$

4) $\cot\left(2x - 10^0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

+ ĐK: $\cos\left(2x - 10^0\right) \neq 0$

+ $\cot\left(2x - 10^0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2x - 10^0 = 60^0 + k.180^0 \Leftrightarrow x = 35^0 + k.90^0$

B. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ SỞ

1. Phương trình cổ điển (phương trình bậc nhất đối với sin và cos)

asinx + bcosx = c (*) (a, b, c $\in$ R và $a^2 + b^2 \neq 0$)

+ Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm là: $\mathbf{a^2 + b^2 \geq c^2}$.

+ Cách giải trong trường hợp tổng quát:

- Chia 2 vế của phương trình (*) cho $\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}$

- Biến đổi để áp dụng công thức cộng

$\cos\left(a \pm b\right) = \cos a.\cos b \mp \sin a.\sin b$; $\sin\left(a \pm b\right) = \sin a.\cos b \pm \sin b.\cos a$

Ví dụ minh họa: Giải các phương trình sau:

VD1: KD-07: $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=2 \Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{}{3}.\sin x+\cos x.\sin\frac{}{3}=\sin\frac{}{6} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{}{3}\right)=\sin\frac{}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{}{3}=\frac{}{6}+k.2 \\ x+\frac{}{3}=\quad -\frac{}{6}+k.2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{}{6}+k.2 \\ x=\frac{}{2}+k.2 \end{array}\right. ;k\in Z$$

VD2: $\sqrt{3}.\sin 7x-\cos 7x=\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x-\frac{1}{2}\cos 7x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{}{6}\sin 7x-\sin\frac{}{6}\cos 7x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(7x-\frac{}{6}\right)=\sin\frac{}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-\frac{}{6}=\frac{}{4}+k.2 \\ 7x-\frac{}{6}=\quad -\frac{}{4}+k.2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{84}+k\frac{2}{7} \\ x=\frac{11}{84}+k\frac{2}{7} \end{array}\right. ;k\in Z$$

VD3: $2\sqrt{2}\left(\cos x+\sin x\right)\cos x=3+\cos 2x$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin x\cos x=3+\cos 2x \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)+\sqrt{2}\sin 2x=3+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x+\left(\sqrt{2}-1\right)\cos 2x=3-\sqrt{2}$$

+ Ta thấy $\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2<\left(3-\sqrt{2}\right)^2$ nên phương trình vô nghiệm

VD4: $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow 4.\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\cos 3x+4.\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x.\cos 3x - \sin 3x\cos 3x + 3\cos x\sin 3x + \cos 3x\sin 3x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sin x\cos 3x + \cos x\sin 3x\right) + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3 \Leftrightarrow 3\sin 4x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3 \Leftrightarrow \sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{}{6}\right) = \cos\frac{}{3} \Leftrightarrow 4x - \frac{}{6} = \pm\frac{}{3} + k2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{8} + k\frac{}{2} \\ x = -\frac{}{24} + k\frac{}{2} \end{array}\right. ;k \in Z$$

VD5: $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 3x - \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{}{6}\cos 3x - \sin\frac{}{6}\sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{}{6}\right) = \cos\frac{}{3} \Leftrightarrow 3x + \frac{}{6} = \pm\frac{}{3} + k2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{18} + k\frac{2}{3} \\ x = \frac{}{6} + k\frac{2}{3} \end{array}\right. ;k \in Z$$

VD6: Tìm m để phương trình sau có nghiệm, giải phương trình trong trường hợp đó

$$2m\left(\cos x + \sin x\right) = 2m^2 + \cos x - \sin x + \frac{3}{2}$$

Hướng dẫn: $\Leftrightarrow \left(2m+1\right)\sin x + \left(2m-1\right)\cos x = 2m^2 + \frac{3}{2}$

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left(2m+1\right)^2 + \left(2m-1\right)^2 \ge \left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(4m^2 - 1\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$$

TH1: $m = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{}{2} + k2 \;,k \in Z$;

TH2: $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \quad + k2 \;,k \in Z$

2. Phương trình chứa tổng (hiệu) và tích của sin-cos (Phương trình đối xứng)

(1): a(sinx ± cosx) + b.sinxcosx + c = 0

Phương pháp: Đặt t = sinx + cosx; đk: $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$$\Rightarrow t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

(2): a(sinx - cosx) + b.sinxcosx + c = 0

Phương pháp: Đặt t = sinx - cosx; đk: $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\ \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

* Chú ý:

$$+\ \sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\ \sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

+ Với phương trình dạng $a|\sin x\pm\cos x|+b\sin x.\cos x+c=0$, ta đặt

$t=|\sin x\pm\cos x|,(0\le t\le\sqrt{2})$

Ví dụ minh họa: Giải các phương trình sau

VD1: $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\cos^2 x\sin x=2(\sin x+\cos x)$

Hướng dẫn:

$\Leftrightarrow 2\cos 2x+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=2(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow 2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=2(\sin x+\cos x)$

(Do $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$)

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left[2(\cos x-\sin x)+\sin x\cos x-2\right]=0$

TH1: $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\sin x=-\cos x\Leftrightarrow\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\;}{4}+k\ ,k\in Z$

TH2: $2(\cos x-\sin x)+\sin x\cos x-2=0\Leftrightarrow 2(\sin x-\cos x)-\sin x\cos x+2=0$

+ Đặt $t=\sin x-\cos x;-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$ thay vào phương trình ta có:

$$t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \Rightarrow \sin x-\cos x=-1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1)\\ t=-3\notin\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\end{array}\right.$$

Từ (1) $\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{}{4}\right)=\cos\frac{}{4} \Leftrightarrow x+\frac{}{4}=\pm\frac{}{4}+k2 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\\ x=-\frac{}{2}+k2\end{array}\right.$ $;k\in Z$

VD2: $\cos^3 x+\sin^3 x=\sin 2x+\sin x+\cos x$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=2\sin x\cos x+\sin x+\cos x$$

+ Đặt $t=\sin x+\cos x;-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$ thay vào phương trình ta có:

… $t^3+2t^2-t-2=0\Leftrightarrow (t+2)(t^2-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2\notin\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ t=\pm 1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=1\\ \sin x+\cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{}{4}\right)=1\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{}{4}\right)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x-\frac{}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\left(x+\frac{}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{}{4}=\pm\frac{}{4}+k2\\ x-\frac{}{4}=-\frac{}{4}+k2\\ x-\frac{}{4}=\quad+\frac{}{4}+k2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{}{2}+k2\\ x=k2\\ x=-\frac{}{2}+k2\\ x=\quad+k2\end{array}\right. \quad ;k\in Z$$

VD3: $2\sin x+\cot x=2\sin 2x+1$

Hướng dẫn:

+ ĐK: $\sin x\ne 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}=(2\sin x\cos x).2+1\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\cos x=4\sin^2 x\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x+\cos x-4\sin^2 x\cos x=0\Leftrightarrow \sin x(2\sin x-1)+\cos x(1-4\sin^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin x-\cos x-2\sin x\cos x)=0$$

TH1: $\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{}{6}+k2\\ x=\frac{5}{6}+k2\end{array}\right.\quad;k\in Z$

TH2: $\sin x-\cos x-2\sin x\cos x=0$

+ Đặt $t=\sin x-\cos x;-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2-2t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1+\sqrt{2}\notin\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ t=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\sin x-\cos x=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{}{4}\right)=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x+\frac{}{4}=\pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+k2\quad\Leftrightarrow x=\pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)-\frac{}{4}+k2\quad;k\in Z$

VD4: $(\sin x+\cos x)^3-\sqrt{2}(\sin 2x+1)+\sin x+\cos x-\sqrt{2}=0$

Hướng dẫn:

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^3-\sqrt{2}(2\sin x\cos x+1)+\sin x+\cos x-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^3-\sqrt{2}(\sin x+\cos x)^2+\sin x+\cos x-\sqrt{2}=0$

+ Đặt :

$t=\sin x+\cos x;-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\Rightarrow t^3-\sqrt{2}.t^2+t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow(t-\sqrt{2})(t^2+1)=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$

$\Rightarrow\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{}{4}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{}{4}=\frac{}{2}+k2\quad\Leftrightarrow x=\frac{}{4}+k2\quad;k\in Z$

III. VẬN DỤNG GIẢI CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC PHỔ BIẾN

DẠNG 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH SỬ DỤNG TRỰC TIẾP PHƯƠNG TRÌNH CƠ SỞ

Giải các phương trình sau

(1) $.\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$

Hướng dẫn:

$\Leftrightarrow\cos 7x+\sqrt{3}\sin 7x=\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x=\frac{1}{2}\sin 5x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x$

$\Leftrightarrow\cos\frac{}{3}\cos 7x+\sin\frac{}{3}\sin 7x=\sin\frac{}{6}\sin 5x+\cos\frac{}{6}\cos 5x\Leftrightarrow\cos\left(7x-\frac{}{3}\right)=\cos\left(5x-\frac{}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 7x-\frac{}{3}=\pm\left(5x-\frac{}{6}\right)+k2 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{}{12}+k \\ x=\frac{}{24}+\frac{k}{6} \end{array}\right. ;k\in Z$$

$$\text{(2)}\ \ 4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)-\sqrt{3}\cos 2x=1+\left[1+\cos\left(2x-\frac{3}{2}\right)\right]\Leftrightarrow 2-2\cos x-\sqrt{3}\cos 2x=2+\cos\left(\frac{3}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow -2\cos x-\sqrt{3}\cos 2x=\cos\left(2\ \ -2x-\frac{}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{}{2}\right)\Leftrightarrow -2\cos x-\sqrt{3}\cos 2x=\sin(-2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\sqrt{3}\cos 2x=\sin 2x\Leftrightarrow \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\cos x\Leftrightarrow \sin\frac{}{6}\sin 2x-\cos\frac{}{6}\cos 2x=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{}{6}\cos 2x-\sin\frac{}{6}\sin 2x=-\cos x\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{}{6}\right)=-\cos x=\cos(\ \ -x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{18}+k\frac{2}{3} \\ x=-\frac{7}{16}+k\frac{2}{3} \end{array}\right. ;k\in Z$$

$$\text{(4)}\ \ \tan\left(\frac{}{2}+x\right)-3\tan^2 x=\frac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}$$

Hướng dẫn:

$$+\ \text{ĐK: }\left\{\begin{array}{l} \cos x\neq 0 \\ \cos\left(\frac{}{2}+x\right)\neq 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \cos x\neq 0 \\ \sin x\neq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -\cot x-3\tan^2 x=\frac{-2\sin^2 x}{\cos^2 x}=-2\tan^2 x\Leftrightarrow -\frac{1}{\tan x}-\tan^2 x=0\Leftrightarrow \tan^3 x=-1$$

$$\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{}{4}+k\ \ ;k\in Z$$

$$\text{(5) KA-09: }\ \frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$$

Hướng dẫn:

+ ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (1-2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - 2\sin x\cos x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\sin x + 2\sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3} + \sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{}{3}\cos x - \sin\frac{}{3}\sin x = \sin\frac{}{6}\sin 2x + \cos\frac{}{6}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{}{3}\right) = \cos\left(2x-\frac{}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{2} + k2 \\ x = -\frac{}{18} + k2 \end{array}\right. ;k \in Z$$

(6) KD-09: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$

Hướng dẫn:

$(\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)])$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - 2.\frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{}{3}-5x\right) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{}{3} - 5x = x + k2 \\ \frac{}{3} - 5x = \quad -x + k2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{18} + \frac{k}{3} \\ x = -\frac{}{6} - \frac{k}{2} \end{array}\right. ;k \in Z$$

(7) KB-09: $\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow \sin x(1-2\sin^2 x) + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \sin x.\cos 2x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{}{6}-3x\right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 3x-\frac{\ }{6}=\pm 4x+k2\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\ }{6}+k2 \\ x=\frac{\ }{42}+k\frac{2}{7} \end{array}\right.;k\in Z$$

(8) KB-06: $\cot x+\sin x(1+\tan x.\tan\frac{x}{2})=4$

Hướng dẫn:

+ **ĐK:** $\begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \\ \cos\frac{x}{2}\neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\sin x\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)=4\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\sin x\left(\frac{\cos\frac{x}{2}.\cos x+\sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}\right)=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\sin x.\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}=4\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x.\cos x}=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x.\cos x}=4\Leftrightarrow \cos x.\sin x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\ }{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\ }{12}+k \\ x=\frac{5}{12}+k \end{array}\right.;k\in Z$$

(9). $\sin x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2(\cos 4x+\sin^3 x)$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \sin x\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\ }{6}-3x\right)=\cos 4x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\ }{6}+k2 \\ x=\frac{\ }{42}+k\frac{2}{7} \end{array}\right.$$

(10). $\cot x+\sin x(1+\tan x.\tan\frac{x}{2})=4$

Hướng dẫn

ĐK: $\sin x, \cos x, \cos\frac{x}{2} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x\left(\frac{\cos x.\cos\frac{x}{2} + \sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{}{6} + k2 \\ 2x = \quad -\frac{}{6} + k2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{12} + k \\ x = \frac{5}{12} + k \end{array}\right.$$

(11) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 9x$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 9x \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{}{4}\right) = \cos 9x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{}{32} + k\frac{}{4} \\ x = \frac{}{40} + k\frac{}{5} \end{array}\right.; k \in Z$$

(12) $2\sin 4x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

Hướng dẫn:

$$\Leftrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(x + \frac{}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{9} + k\frac{2}{3} \\ x = \frac{4}{15} + k\frac{2}{5} \end{array}\right.; k \in Z$$

(13) $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 8\cos x$

Hướng dẫn:

+ ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = 8\cos^2 x.\sin x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = 8\left(1-\sin^2 x\right).\sin x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = 8\sin x - 8\sin^3 x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = 6\sin x - 8\sin^3 x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2.\sin 3x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \sin 3x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{}{3} - x\right) = \sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{12} + k\frac{}{2} \\ x = \frac{}{3} + k \end{array}\right.;k \in Z$

$$(14)\ \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin 2x + \sin x} = \sqrt{3}$$

Hướng dẫn:

+ ĐK: $\sin 2x + \sin x = \sin x\left(2\cos x + 1\right) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \cos x = \sqrt{3}\left(\sin 2x + \sin x\right) \Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin x = \cos x + \sqrt{3}\sin x$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{2}{3} + k2 \\ x = k\frac{2}{3} \end{array}\right. ;k \in Z$

$$(15)\ \cos 3x.\cos^3 x - \sin 3x.\sin^3 x = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$$

Hướng dẫn:

$\Leftrightarrow \cos 3x.\frac{3\cos x + \cos 3x}{4} - \sin 3x.\frac{3\sin x - \sin 3x}{4} = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 3x + \sin^2 3x + 3\left(\cos 3x.\cos x - \sin 3x.\sin x\right)}{5} = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow \cos^2 3x + \sin^2 3x + 3.\cos 4x = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{}{16} + k\frac{}{2};k \in Z$

$$(16)\ \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$$

Hướng dẫn:

+ ĐK: $\cos x \neq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - 2.\frac{1-\cos\left(x-\frac{}{2}\right)}{2} = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow 2\cos x - \sqrt{3}\cos x - 1 + \cos\left(\frac{}{2}-x\right) = 2\cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x - \sqrt{3}\cos x - 1 + \sin x = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(x-\frac{}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{}{3} + k$$

Kết hợp ĐK ta có: $x = \frac{4}{3} + k2 \;\; ;k \in Z$

$$(17)\;\; \cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$$

Hướng dẫn:

+ ĐK: $\sin 2x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\cos 4x}{2\sin x\cos x} \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k \quad (ktm) \\ x = k\frac{}{3} \end{array}\right. ;k \in Z$$

$$(18).\;\; 4\sin^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1-\cos x}{2}\right) - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + \left[1 + \cos\left(2x - \frac{3}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\cos x - \sqrt{3}\cos 2x = 2 + \cos\left(2x - \frac{3}{2}\right) = \cos\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow -2\cos x - \sqrt{3}\cos 2x = \cos\left(2 \;\; -2x - \frac{}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -2\cos x - \sqrt{3}\cos 2x = \sin(-2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x + \sqrt{3}\cos 2x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{}{6}\sin 2x - \cos\frac{}{6}\cos 2x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{}{6}\cos 2x - \sin\frac{}{6}\sin 2x = -\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{}{6}\right) = \cos(\ \ - x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{}{6} = \ \ - x + k2 \\ 2x + \frac{}{6} = -(\ \ - x) + k2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{18} + k\frac{2}{3} \\ x = -\frac{7}{6} + k2 \end{array}\right.$$

$$(19).\ \ \mathbf{\tan\left(\frac{}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}}$$

Hướng dẫn

ĐK: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos\left(\frac{}{2} + x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -\cot x - 3\tan^2 x = \frac{-2\sin^2 x}{\cos^2 x} = -2\tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\tan x} - \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = -1 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{}{4} + k$$

$$(20).\ \ \mathbf{\left(1 + \sqrt{3}\right)\sin x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\cos x = 2}$$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\sin x + \cos x - \sqrt{3}\cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{}{6}\sin x - \cos\frac{}{6}\cos x + \sin\frac{}{3}\sin x + \cos\frac{}{3}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow -\left[\cos\left(\frac{}{6} + x\right)\right] + \cos\left(\frac{}{3} - x\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{}{3} - x\right) - \cos\left(\frac{}{6} + x\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{}{4}.\sin\left(\frac{}{12}-x\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{}{12}-x\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(\frac{}{12}-x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{}{6}+k2 \\ x=\frac{5}{6}+k2 \end{array}\right.$$

DẠNG 2: NHÓM THỪA SỐ CHUNG

Giải các phương trình lượng giác sau

Bài 1: KB-2008: $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x.\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)+\sqrt{3}\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x+\sqrt{3}\cos x\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=0$$

TH1: cos2x = 0 $\Leftrightarrow 2x=\frac{}{2}+k \quad \Leftrightarrow x=\frac{}{4}+k\frac{}{2}(k\in Z)$

TH2: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow \sin x=-\sqrt{3}\cos x$

$$\Leftrightarrow \tan x=-\sqrt{3}=\tan(-\frac{}{3})$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{}{3}+k \quad (k\in Z)$$

Bài 2: $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x$

Hướng dẫn: $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin x(2\cos x-1)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{}{3} \\ \tan x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{}{3}+k2 \\ x=-\frac{}{4}+k \end{array}\right. \quad (k\in Z)$$

Bài 3: KD-2011: $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$

Hướng dẫn

* ĐK: $\left\{\begin{array}{l} \tan x\neq -\sqrt{3} \\ \cos x\neq 0 \end{array}\right.$

* $\sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{}{2} + k2 \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{}{3} + k2\end{array}\right.$$

$$((x = -\frac{}{3} + k2 \quad \text{loại })$$

Bài 4: KB-2005: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\cos x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0 \\ 2\cos x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{}{4} + k \\ x = \pm\frac{2}{3} + k2\end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 5: KB -2010: $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cos x + \cos 2x\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x + \cos 2x(\cos x + 2) - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 x - 1) + \cos 2x(\cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x + \cos 2x(\cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

TH1: cos2x=0 $\Leftrightarrow 2x = \frac{}{2} + k \quad \Leftrightarrow x = \frac{}{4} + k\frac{}{2} (k \in Z)$

TH2: sinx + cosx + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ phương trình vô nghiệm vì $1^2 + 1^2 < (-2)^2$

Bài 6: KD - 2008: 2sinx(1+co2x) +sin2x = 1 + 2cosx

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 2\ \text{sinx}\ .2\ \cos^2\text{x} + 2\text{sinxcosx} = 1 + 2\text{cosx}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x(2\cos x + 1) = 2\cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(2\sin x\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2}{3} \\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\frac{2}{3} + k2 \\ x = \frac{}{4} + k\end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 7: KB-2011: sin2xcosx + sinxcosx = cos2x + sinx + cosx

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos^2 x+\sin x\cos x-\cos 2x-\sin x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 x+\cos x-1)-(\cos 2x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \sin x(\cos 2x+\cos x)-(\cos 2x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-1)(\cos 2x+\cos x)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{}{2}+k2\ \ ,k\in Z\\ \cos 2x+\cos x=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\ \ +k2\\ x=\pm\frac{}{3}+k2\end{array}\right.\ (k\in Z)\end{array}\right.$$

Bài 8: KA-2007: $(1+\sin^2 x)\cos x+(1+\cos^2 x)\sin x=1+\sin 2x$

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow \cos x+\sin^2 x\cos x+\sin x+\cos^2 x\sin x=1+\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos x+\sin x+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=(\sin x+\cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\sin x\cos x-\sin x-\cos x)=0$

TH1: sinx + cosx = 0 $\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{}{4}+k\ \ (k\in Z)$

TH2: 1 + sinxcosx - (sinx + cosx) = 0

$\Leftrightarrow 1-\sin x+\cos x(\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1-\cos x)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=1\Rightarrow x=\frac{}{2}+k2\\ \cos x=1\Rightarrow x=k2\end{array}\right.\ (k\in Z)$$

Bài 9: $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 12x-\cos 6x+\cos 10x-\cos 8x=0$

$\Leftrightarrow -2\sin 9x\sin 3x-2\sin 9x\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin 9x(\sin 3x+\sin x)=0$

TH1: sin9x = 0 $\Leftrightarrow 9x=k\ \ \Leftrightarrow x=\frac{k}{9}$

TH2: sin3x = -sinx = sin (-x) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=-x+k2\\ 3x=\ \ +x+k2\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{k}{2}\\ x=\frac{}{2}+k\end{array}\right.,k\in Z$

Bài 10: ĐHKB-2007 : $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \sin 7x - \sin x = 1 - 2\sin^2 2x$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 4x \sin 3x = \cos 4x$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$$

TH1: cos4x = 0 $\Leftrightarrow 4x = k \quad + \frac{}{2} \Leftrightarrow x = \frac{}{8} + k\frac{}{4}$

TH2: sin 3x = $\frac{1}{2} = \sin\frac{}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{}{6} + k2 \\ 3x = \frac{5}{6} + k2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{18} + k\frac{2}{3} \\ x = \frac{5}{18} + k\frac{2}{3} \end{array}\right. .(k \in Z)$

Bài 11: KA-2010: $\dfrac{(1+\sin x + \cos 2x)\sin(x + \frac{}{4})}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

Hướng dẫn

* ĐK: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases}$

* Phương trình

$$\Leftrightarrow (1+\sin x+\cos 2x).\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x(1+\tan x)$$
$$\Leftrightarrow (1+\sin x+\cos 2x)(\sin x+\cos x) = (\cos x+\sin x)$$
$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\sin x+\cos 2x-1) = 0$$

TH1: sinx + cosx = 0 $\Leftrightarrow \tan x = -1$ (loại)

TH2: sin x + cos2x = 0 $\Leftrightarrow \sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1(\text{loai})\text{vì} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{}{6}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{}{6} + k2 \\ x = \quad + \frac{}{6} + k2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Bài 12: KA-2011: $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x \sin 2x$

Hướng dẫn

* KĐ: sinx $\neq 0$

* $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{2}\sin x.2\sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(1+\sin 2x+\cos 2x) = \sqrt{2}\sin^2 x.2\cos x$$
$$\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos 2x = 2\sqrt{2}\cos x$$
$$\Leftrightarrow 1+\sin 2x+2\cos^2 x-1 = 2\sqrt{2}\cos x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos^2 x = 2\sqrt{2}\cos x$$
$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x+\cos x-\sqrt{2}) = 0$$

TH1: cosx = 0 $\Leftrightarrow x=\frac{}{2}+k \quad ,k\in Z$

TH2: sinx + cosx = $\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(x-\frac{}{4})=\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(x-\frac{}{4})=1 \Leftrightarrow x-\frac{}{4}=k2 \quad \Leftrightarrow x=\frac{}{4}+k2 \quad ,k\in Z$$

Bài 13: KA - 08 : $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin(x-\frac{3}{2})}=4\sin(\frac{7}{4}-x)$

Hướng dẫn

* KĐ:

* Ta có:

$$\sin(x-\frac{3}{2})=\sin x\cos\frac{3}{2}-\cos x.\sin\frac{3}{2}=\cos x$$

$$\sin(\frac{7}{4}-x)=\sin\frac{7}{4}.\cos x-\cos\frac{7}{4}.\sin x$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$$

Vậy phương trình: $\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x).\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\sqrt{2}\sin 2x)=0$$

TH1: sin x + cosx = 0 $\Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{}{4}+k$

TH2: $\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(-\frac{}{4}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\frac{}{4}+k2 \\ 2x=\quad +\frac{}{4}+k2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{}{8}+k \\ x=\frac{5}{8}+k \end{array}\right. ,k\in Z$

Bài 14: KB-2003: $\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{}{4}).\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$

Hướng dẫn

* KĐ: cosx $\neq 0$

* $\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{}{4})=\frac{1-\cos(x-\frac{}{2})}{2}=\frac{1-\sin x}{2}$

Phương trình: $\Leftrightarrow \frac{1-\sin x}{2}.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1+\cos x}{2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\sin x).\sin^2 x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} - (1+\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - (1+\cos x)(1+\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(1+\cos x) - (1+\cos x)(1+\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(1-\cos x - 1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x).(\sin x + \cos x) = 0$$

TH1: cosx = -1 $\Leftrightarrow x = \quad + k2$

TH2: sinx + cosx = 0 $\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{}{4} + k \quad , k \in Z$

Bài 15: KA- 03: $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1+\tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$

Hướng dẫn

* ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases}$

* Phương trình đã cho:

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} + \sin^2 x - \sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\frac{1}{\sin x} - \cos x + \sin x) = 0$$

TH1: sin x = cosx $\Leftrightarrow x = \frac{}{4} + k$

TH2: 1-sinxcosx + $\sin^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + \cot^2 x - \cot x + 1 = 0 \quad \text{(vô nghiệm)}$$

Bài 16: KD-10: sin2x - cos2x + 3sinx - cosx - 1 = 0

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - (1 - 2\sin^2 x) + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x + 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x + (\sin x + 2)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{6} + k2 \\ x = \frac{5}{6} + k2 \end{array}\right. \\ \sin x + \cos x = -2 \text{ (vônghiem)vì } 1^2 + 1^2 < (-2)^2 \end{array}\right.$$

Bài 17: sin2x + 2 cos2x + 4cosx - sinx-1 = 0

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x + 2(2\cos^2 x - 1) + 4\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + 4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos - 1)(2\cos x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + 2\cos x + 3) = 0$$

TH1: sinx + 2cosx = -3 (vô nghiệm) vì $1^2 + 1^2 < (-3)^2$

TH2: cosx = $\frac{1}{2} = \cos\frac{}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{}{3} + k2 \ \ .(k \in Z)$

Bài 18: 2sin2x -cos2x = 7sinx + 2 cosx - 4

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x - (1 - 2\sin^2 x) - 7\sin x - 2\cos x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 7\sin x - 2\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin^2 x - 7\sin x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(sin \quad - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \frac{}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{6} + k2 \\ x = \frac{5}{6} + k2 \end{array}\right. , k \in Z$$

Bài 19: $\tan^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x).\sin 3x}{\cos^4 x}$

Hướng dẫn

* ĐK: cosx $\neq 0$
* PT

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x).\sin 3x}{\cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = (2 - \sin^2 2x).\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = (2 - \sin^2 2x).\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x = 2(2 - \sin^2 2x).\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow (2-\sin^2 2x)(2\sin 3x-1)=0 \Leftrightarrow \sin 3x=\frac{}{2}=\sin\frac{}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{}{18}+k\frac{2}{3} \\ x=\frac{5}{18}+k\frac{2}{3} \end{array}\right., k\in Z$$

Bài 20: 3 - tan x (tanx + 2sinx) + 6cosx = 0

Hướng dẫn

* KĐ: Cosx $\neq 0$

* PT $\Leftrightarrow 3-\frac{\sin x}{\cos x}(\frac{\sin x+2\sin x\cos x}{\cos x})+6\cos x=0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin^2 x\cos x+6\cos^3 x=0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1+2\cos x)-\sin^2 x(1+2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (1+2\cos x)(3\cos^2 x-si\ \ ^2x)=0$

TH1: 1 + 2cosx = 0 $\Leftrightarrow$ ....

TH2: $3\cos^2 x.(1-\cos^2 x)=0$ (Phương trình bậc 2 ẩn là cosx …)

Bài 21: $3\tan^3 x-\tan x+\frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x}=8\cos^2(\frac{}{4}-\frac{x}{2})$

Hướng dẫn

* ĐK: $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \sin x\neq \pm 1$

* PT

$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x-1)+3(1+\sin x).(1+\tan^2 x)=4\left[1+\cos(\frac{}{2}-x)\right]=4(1+\sin x)$

$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x-1)+(1+\sin x)\left[(3\tan^2 x-1)-4\right]-4(1+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x-1)+(1+\sin x)\left[3\tan^2 x-1+4-4\right]=0$

$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x-1)+(1+\sin x)(3\tan^2 x-1)=0$

$\Leftrightarrow (3\tan^2 x-1)(\tan x+1+\sin x)=0$

TH1: $3\tan^2 x-1=0 \Leftrightarrow \tan x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{}{6}+k$

TH2: tanx +1 + sinx = 0

$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+1+\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0$

- Đặt t = sinx + cosx = $\sqrt{2}\sin(x+\frac{}{4});-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}.$

+ $t\neq\pm 1 \Rightarrow ....t^2+2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{2}\notin\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \\ t=-1+\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sin(x+\frac{}{4})=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\sin$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{}{4}=\quad +k2 \\ x+\frac{}{4}=\quad -\quad +k2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\quad -\frac{}{4}+k2 \\ x=\frac{3}{4}-\quad +k2 \end{array}\right., k\in Z$$

Bài 22: $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - (\sin x - \cos x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$

$\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x\cos x) - (\sin x - \cos x) + (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2 + \sin 2x - 1 + \sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 1) = 0$

(chú ý: $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{}{4} + k$)

- Đặt t = sinx + cosx = $\sqrt{2}\cos(x - \frac{}{4})$ … $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \end{array}\right.$ … ĐS: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + k \\ x = \quad + k2 \\ x = -\frac{}{2} + k2 \end{array}\right.$

Bài 23: $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^3 x - \cos^3 x) + (\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{}{4} + k \quad , k \in Z \\ 1 + \sin x + \cos x + 1 + \sin x\cos x + \sin x + \cos x = 0 (2) \end{array}\right.$

Xét (2): đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{}{4}), -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

$\ldots \Rightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -3 (loai) \end{array}\right.$

+ với t = -1 $\Leftrightarrow \cos(x - \frac{}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \quad + k2 \\ x = -\frac{}{2} + k2 \end{array}\right. , k \in Z$

Bài 24: 2sinx(1+cos2x) + sin2x = 1 + 2 cosx

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow 2\sin x(2\cos^2 x) + 2\sin x\cos x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x(2\cos x + 1) - (1 + 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(2\sin x\cos x - 1) = 0$

TH1: $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{3} + k2$

TH2: 2sinxcosx -1 = 0 $\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{}{4} + k$

Bài 25: $\sin^2(\frac{x}{2} - \frac{}{4}).\tan^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0$

Hướng dẫn

* ĐK: $\cos x \ne 0$

* PT

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos(x-\frac{}{2})}{2}.\frac{1-\cos^2}{\cos^2 x}-\frac{1+\cos x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sin x}{2}.\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x}-\frac{1+\cos x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1-\cos x)(1+\cos x)-\cos^2 x(1+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left[(1-\sin x)(1-\cos x)-\cos^2 x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left[(1-\sin x)(1-\cos x)-(1-\sin^2 x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(1-\sin x)(1-\cos x-1-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(1-\sin x)(\cos x+\sin x)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=-1\\ t\,anx=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{}{2}+k2\\ x=\quad+k2\\ x=-\frac{}{4}+k2\end{array}\right. ,k\in Z$$

+ Kết hợp đk: $\Rightarrow x=-\frac{}{4}+k\;\;;x=\quad+k2\;\;,k\in Z$

Bài 26: $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{3})\cos x$

Hướng dẫn

* ĐK: $\sin x\neq 0$

* $3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin 4x=2\cos x.\sin^2 x+3\sqrt{2}\cos x.\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 3\cos x(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x)+2\sin^2 x(\sqrt{2}\sin^2 x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x)(3\cos x-2\sin^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sqrt{2}(1-\cos^2 x)=0\\ 3\cos x-2(1-\cos^2 x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=\cos\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\quad+k2\\ x=\pm\frac{}{3}+k2\end{array}\right.$$

DẠNG 3: BIẾN ĐỔI VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2, BẬC 3, TRÙNG PHƯƠNG

Bài 1: KA-06: $\dfrac{2(\cos^6 x+\sin^6 x)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$

Hướng dẫn

* ĐK: $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

* $2(\cos^6 x+\sin^s x)-\sin x\cos x=0$

$$\Leftrightarrow 2(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x)-\frac{\sin 2x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\ }{4}+k\ \ ,k\in Z\\ \sin 2x=-\frac{4}{3}(\text{loai})\end{array}\right.$$

\+ Kết hợp đk: $\Rightarrow x=\dfrac{5}{4}+k2\ \ ,k\in Z$

Bài 2: KD-05: $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos(x-\frac{\ }{4}).\sin(3x-\frac{\ }{4})-\frac{3}{2}=0$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\sin(3x-\frac{\ }{4}).\cos(x-\frac{\ }{4})-\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\left[\sin 2x+\sin(4x-\frac{\ }{2}\right]-\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x+\sin 2x-\cos 4x-3=0$$

$$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x+\sin 2x-(1-2\sin^2 2x)-3=0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=-2(\text{vôlý})\\ \sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\ }{4}+k\ \ ,k\in Z\end{array}\right.$$

Bài 3: KA-05: $\cos^2 3x.\cos 2x-\cos^2 x=0$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}.\cos 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=0\Leftrightarrow \cos 6x.\cos 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3 2x-3\cos 2x).\cos 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x-3\cos^2 2x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 2x=-\frac{1}{4}(loai)\\ \cos^2 2x=1\Leftrightarrow \cos 2x=\pm 1\end{array}\right.$$

(Hoặc sin2x = 0 $\Leftrightarrow x=\dfrac{k}{2},k\in Z$)

Bài 4: KB-03: $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

Hướng dẫn

* ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

* $\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin 2x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\sin^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 2(1-\cos^2 2x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{}{6} + k \quad ,k \in Z \\ \cos 2x = 1(loai) \end{array}\right.$$

Kết hợp đk: $\Rightarrow x = \pm\frac{}{6} + k$

Bài 5: KB-04: $5\sin x - 2 = 3\tan^2 x(1-\sin x)$

Hướng dẫn

* Đk: $\cos x \neq 0$

* 5sinx - 2 = $3\dfrac{\sin^2 x}{(1-\sin^2 x)}.(1-\sin x)$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}$$

$$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1+\sin x) = 3\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -2(v\hat{o}nghiem) \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{6} + k2 \\ x = \frac{5}{6} + k2 \end{array}\right.$$

Bài 6:KA-02: $5(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1+2\sin 2x}) = \cos 2x + 3$

Hướng dẫn

* ĐK: $\sin 2x \neq -\dfrac{1}{2}$

* 5(sinx + $\dfrac{4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x}{1+2\sin 2x}) = \cos 2x + 3$

$$\Leftrightarrow 5\left[\sin x + \frac{(\cos x - \sin x)(1+2\sin 2x)}{1+2\sin 2x}\right] = \cos 2x + 3$$

Chú ý:

$(4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x) = 4(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x \cos x) - 3(\cos x - \sin x)$

$= (\cos x - \sin x)(4 + 4\sin x \cos x - 3) = ...)$

Bài này nên biến đổi: cos3x + sin 3x trước rồi thay vào)

$\Leftrightarrow 5(\sin x + \cos x - \sin x) = \cos 2x + 3$

$\Leftrightarrow 5\cos x = (2\cos^2 x - 1) + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 2(loai) \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{}{3} + k2 \quad ,k \in Z \end{array}\right.$

Bài 7: $2\cos^2 2x + \cos 2x = 4\cos^2 x.\sin^2 2x$

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x + 4\cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 2x + 2)(2\cos^2 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{}{2} + k \quad \Leftrightarrow x = \frac{}{8} + k\frac{}{2}.$

(nếu làm: $\cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sẽ có 4 họ nghiệm)

Bài 8: KD-06: cos3x - cos2x - cosx - 1 = 0

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^2 x - 1 - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 4\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(2\cos x + 1) - 2(2\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2}{3} + k2 \\ x = k \end{array}\right. \quad ,k \in Z$

Bài 9: KD-02: cos3x - 4cos2x + 3cosx - 4 = 0; x $\in [0;14]$

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{}{2} + k \quad ,k \in Z$

Do $x \in [0;14] \Rightarrow 0 \le \frac{}{2} + k \quad \le 14 \Leftrightarrow k = 0;1;2;3 \Rightarrow x = \frac{}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{7}{2}$

Bài 10: $4\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{3x}{2} + 2(8\sin x - 1).\cos x = 5$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 4.\left[\frac{1}{2}\cos(\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2})+\cos(\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2})\right]+16\sin x\cos x-8\cos x=5$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\cos 4x+\cos x\right]+8\sin 2x-8\cos x=5$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x+8\sin 2x=5$$

$$\Leftrightarrow 2(1-2\sin^2 2x)+8\sin 2x-5=0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin^2 2x+8\sin 2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x-8\sin 2x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=\frac{3}{2}(\text{loai})\\ \sin 2x=\frac{1}{2}=\sin\frac{}{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{}{6}+k2\\ 2x=\frac{5}{6}+k2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{}{12}+k\\ x=\frac{5}{12}+k\end{array}\right., k\in Z$$

Bài 11: $2\cos 2x-8\cos x+7=\frac{1}{\cos x}$

Hướng dẫn

* ĐK: $\cos x\neq 0$

* $2(2\cos^2 x-1).\cos x-8\cos^2 x+7\cos x=1$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-8\cos^2 x-5\cos x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\\ x=\pm\frac{}{3}+k2\end{array}\right.$$

Bài 12: $\sin^2 x+\sin^2 3x-3\cos^2 2x=0$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}-3\cos^2 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2-\cos 2x-(4\cos^3 2x-3\cos 2x)-6\cos^2 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x+3\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=-\frac{1}{2}\\ \cos 2x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cos\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{}{3}+k\\ x=\pm\frac{}{2}+k\end{array}\right., k\in Z$$

Bài 13: $48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}.(1+\cot 2x.\cot x)=0$

Hướng dẫn

* ĐK: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$

* PT

$$\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}.(1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}.\frac{\cos x}{\sin x})=0$$

$$\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}.(\frac{\sin 2x.\sin x+\cos 2x.\cos x}{\sin 2x.\sin x})=0$$

$$\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}.\frac{\cos x}{\sin 2x.\sin x}=0$$

$$\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^3 x}.\frac{\cos x}{2\sin x.\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow 48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{1}{\sin^4 x}=0$$

$$\Leftrightarrow 48\cos^4 x.\sin^4 x-(\sin^4 x+\cos^4 x)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^4 2x-(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)=0$$

$$\Leftrightarrow 6\sin^4 2x+\sin^2 2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 2x=-\frac{2}{3}(\text{loai})\\ \sin^2 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{}{4}\\ \sin 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin(-\frac{}{4})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{}{8}+k\ ;x=\frac{3}{8}+k\ ;x=-\frac{}{8}+k\ ;x=\frac{5}{8}+k\ ,k\in Z$$

Bài 14: $(\sin x+3).\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)-(\sin x+3).\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+1=0$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow (\sin x+3)\left[\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+3).\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\left[\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right]+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+3).\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\left[1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right]+1=0$$

$$\Leftrightarrow -(\sin x+3).\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow -(\sin x+3).\frac{1}{4}\sin^2 x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x+3\sin^2 x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{}{2}+k2\ ,k\in Z\\ \sin x=-2\notin[-1;1]\end{array}\right.$$

Bài 15: $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{8\sin 2x}$ (ĐK: …)

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}.\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{1}{8\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x-20\cos 2x+9=0\ (\sin^2 2x=1-\cos^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{9}{4}\notin[-1;1]\\ \cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\ }{6}+k\ \ ,k\in Z\end{array}\right.$$

Bài 16: $\cos 2x+\cos\left(2\tan^2 x+1\right)=2$

Hướng dẫn: ĐK $\cos x\neq 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos x\left(2.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+2.\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\cos x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos^2 x-1\right)\cos x+2\left(1-\cos^2 x\right)+\cos^2 x-2\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x-\cos^2 x-3\cos x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=2\notin[-1;1]\\ \cos x=1\Leftrightarrow ...\end{array}\right.$$

Bài 17: $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 3\left(\cos 4x+1\right)-2\cos^2 x\left(4\cos^4 x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3.2\cos^2 2x-2\cos^2 x\left(2\cos^2 x-1\right)\left(2\cos^2 x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x-2\cos^2 x.\cos 2x\left(2\cos^2 x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left[3\cos 2x-\cos^2 x\left(2\cos^2 x+1\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left[3\left(2\cos^2 x-1\right)-2\cos^4 x-\cos^2 x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(2\cos^4 x-5\cos^2 x+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos^2 x=1\\ \cos^2 x=\frac{3}{2}>1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\ \ +k2\\ x=\pm\frac{\ }{3}+k2\end{array}\right.$$

Bài 18: $\sin x.\cos 2x+\cos^2 x\left(\tan^2 x-1\right)+2\sin^3 x=0$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos 2x + 2\sin^2 x\right) + \cos^2 x\left(\tan^2 x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos 2x + 1 - \cos 2x\right) + \cos^2 x.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin^2 x - \left(1 - \sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\,}{2} + k2 \\ x = \frac{\,}{6} + k2 \\ x = \frac{5}{6} + k2 \end{array}\right.$$

DẠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐẲNG CẤP

Khi gặp phương trình lượng giác đẳng cấp bậc n (mọi hạng tử trong phương trình đều có bậc n) hoặc có dạng tương tự như đẳng cấp thì ta chia 2 vế của phương trình cho $\cos^n x$

Bài 1: $3\cos^4 x - 4\cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x = 0$

Hướng dẫn

+ Ta thấy $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow \cos x \neq 0$

+ Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^4 x \neq 0$ ta được:

$$3 - 4\tan^2 x + \tan^4 x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan^2 x = 1 \\ \tan^2 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow ...$$

Bài 2: $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x.\sin^2 x + \sin x = 0$

Hướng dẫn

+ Ta thấy $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow \cos x \neq 0$

+ Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được:

$$1 - 4\tan^3 x - 3\tan^2 x + \frac{\sin x}{\cos^3 x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x\frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x\left(1 + \tan^2 x\right) = 0 \Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow ...$$

Bài 3: $\sin^2 x(\tan x+1)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3$

Hướng dẫn

+ ĐK: $\cos x\neq 0$

+ Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x\neq 0$ ta được:

$$\tan^2 x(\tan x+1)=3\tan x-3\tan^2 x+3(1+\tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x+1)(\tan^2 x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow ...$$

Bài 4: $8\cos^3\left(x+\frac{}{3}\right)=\cos 3x$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \left[2\cos\left(x+\frac{}{3}\right)\right]^3=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[2\left(\cos x.\cos\frac{}{3}-\sin x.\sin\frac{}{3}\right)\right]^3=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\right]^3=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x-3\sqrt{3}\cos^2 x\sin x+9\sin^2 x\cos x-3\sqrt{3}\sin^3 x=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\Leftrightarrow -3\cos^3 x-3\sqrt{3}\sin^3 x-3\sqrt{3}\cos^2 x\sin x+9\sin^2 x\cos x+3\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow -3-3\sqrt{3}\tan^3 x-3\sqrt{3}\tan x+9\tan^2 x+3(1+\tan^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{3}\tan^3 x+12\tan^2 x-3\sqrt{3}\tan x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=0\\ \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow ...$$

Bài 5: $2\cos^3 x=6\sin x-5\sin 2x.\cos x$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x=6\sin x-10\sin x.\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2=6\tan x(1+\tan^2 x)-10\tan x$$

$$\Leftrightarrow 6\tan^3 x-4\tan x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{}{4}+k\ ,k\in Z$$

Bài 6: $\sin x+\cos x-4\cos^3 x$

Hướng dẫn

Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x\neq 0$ ta có

$\Leftrightarrow \tan x\left(1+\tan^2 x\right)+1+\tan^2 x-4=0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x+\tan x-3=0$

$\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{}{4}+k\ \ ,k\in Z$

Bài 7 (KB-09) $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x.\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x.\cos x$

Hướng dẫn

Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x\neq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow \tan^3 x-\sqrt{3}=\tan x-\sqrt{3}\tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x+\sqrt{3}\tan x-\tan x-\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=-1\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{}{4}+k\frac{}{2}\\ x=-\frac{}{3}+k\end{array}\right.$$

Bài 8: $\sin^2 x\left(\tan x+1\right)=3\sin x\left(\cos x-\sin x\right)+3$

Hướng dẫn: ĐK $\cos x\neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)=3\sin x\left(\cos x-\sin x\right)+3$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x+\sin^2 x\cos x=3\sin x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos x+3\cos x$$

Chia 2 vế của phương trình cho $\cos x\neq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x=3\tan x-3\tan^2 x+3\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan x+1\right)\left(\tan^2 x-3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{}{4}+k\\ x=\pm\frac{}{3}+k\end{array}\right.$$

Bài 9: Cho phương trình $\sin^2 x+2\left(m-1\right)\sin x\cos x-\left(m+1\right)\cos^2 x=m$

Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm

Hướng dẫn

* Với $\cos x=0\Rightarrow \sin^2 x=m\Rightarrow m=1$ thì phương trình có nghiệm.
* Với $m\neq 1\Rightarrow \cos x\neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x\neq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow \left(m-1\right)\tan^2 x-2\left(m-1\right)\tan x+2m+1=0(1)$$

+ Đặt $t=\tan x\Rightarrow \left(m-1\right)t^2-2\left(m-1\right)t+2m+1=0$ (2)

+ Phương trình (1) có nghiệm khi (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\geq 0\Leftrightarrow -2\leq m<1$

KL: giá trị m cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-2\leq m\leq 1$

Bài 10: $\sin^3 x+\cos^3 x=2\left(\sin^5 x+\cos^5 x\right)$

Hướng dẫn

Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^5 x \neq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow \tan^3 x.\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=2\left(\tan^5 x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x.\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\tan^2 x\right)=2\left(\tan^5 x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan^5 x-\tan^3 x-\tan^2 x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x\left(\tan^2 x-1\right)-\left(\tan^2 x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan^2 x-1\right)\left(\tan^3 x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \tan x=\pm 1 \Leftrightarrow x=\frac{}{4}+k\frac{}{2}, k\in Z$$

Bài 11: $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=1+\sin^2 x$$

Chia 2 vế của phương trình cho $\cos x \neq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{3}\tan x=\left(1+\tan^2 x\right)+\tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0 \Leftrightarrow x=k\\ \tan x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-\frac{}{3}+k\end{array}\right.$$

Bài 12: $\sin 2x+2\tan x=3$

Hướng dẫn: ĐK $\cos x \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\frac{\sin x}{\cos x}=3$$

Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow 2.\frac{\sin x}{\cos x}+2.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{3}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan x+2\tan x.\left(1+\tan^2 x\right)=3\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^3 x-3\tan^2 x+4\tan x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{}{4}+k \;, k\in Z$$

Bài 13: $\sin x.\sin 2x+\sin 3x=6\cos^3 x$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos x+3\sin x-4\sin^3 x=6\cos^3 x$$

+ Ta thấy khi $\cos x=0 \Rightarrow \sin x=\pm 1$ phương trình vô nghiệm, chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được

$$\Leftrightarrow 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{3\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x}-4.\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}=6$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x+3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-4\tan^3 x=6$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x-2\tan^2 x-3\tan x-6=0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x-2)\left(\tan^2 x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=2=\tan \quad \Leftrightarrow x= \quad +k \\ \tan x=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{}{3}+k\end{array}\right.$$

Bài 14: $6\sin x-2\cos^3 x=\frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$

Hướng dẫn: ĐK $\cos 2x\neq 0\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x\neq 0\Leftrightarrow \tan x\neq \pm 1$

$$\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=\frac{10\sin 2x\cos 2x\cos x}{2\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x$$

$$\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=10\sin x\cos^2 x$$

+ Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x\neq 0$ ta được

$$\Leftrightarrow 6\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-2=10\tan x$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-2\tan x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x-1)\left(3\tan^2 x+3\tan x+1\right)=0$$

Phương trình vô nghiệm

Bài 15: $\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0$

Hướng dẫn

+ Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x\neq 0$ ta được

$$\Leftrightarrow \tan x\left(1+\tan^2 x\right)-4\tan^3 x+1+\tan^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan^2 x-\tan x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x-1)\left(3\tan^2 x+2\tan x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{}{4}+k$$

Bài 16: $\tan x.\sin^2 x-2\sin^2 x=3(\cos 2x+\sin x\cos x)$

Hướng dẫn

+ Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x\neq 0$ ta được

$$\Leftrightarrow \tan^3 x-2\tan^2 x=\frac{3\left(\cos^2 x-\sin^2 x+\sin x\cos x\right)}{\cos^2 x}\Leftrightarrow \tan^3 x-2\tan^2 x=3\left(1-\tan^2 x+\tan x\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0\Leftrightarrow (\tan x+1)\left(\tan^2 x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{}{4}+k \;;\tan x=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{}{3}+k$$

DẠNG 5: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC (sưu tầm)

Một số bài toán về phương trình lượng giác mà cách giải tuỳ theo đặc thù của phương trình, chứ không nằm ở trong phương pháp đã nêu ở hầu hết các sách giáo khoa.

Một số phương trình lượng giác thể hiện tính không mẫu mực ở ngay dạng của chúng, nhưng cũng có những phương trình ta thấy dạng rất bình thường nhưng cách giải lại không mẫu mực.

Sau đây là những phương trình lượng giác có cách giải không mẫu mực thường gặp.

I. PHƯƠNG PHÁP TỔNG BÌNH PHƯƠNG

Phương pháp này nhằm biến đổi phương trình lượng giác về dạng một vế là tổng bình phương các số hạng (hay tổng các số hạng không âm) và vế còn lại bằng không và áp dụng tính chất:

$$A^2+B^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

Bài 1. Giải phương trình: $3\tan^2 x+4\sin^2 x-2\sqrt{3}\tan x-4\sin x+2=0$

Hướng dẫn

$3\tan^2 x+4\sin^2 x-2\sqrt{3}\tan x-4\sin x+2=0$

$\Leftrightarrow 3\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+1+4\sin^2 x-4\sin x+1=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\tan x-1)^2+(2\sin x-1)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\tan x-1=0 \\ 2\sin x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\ }{6}+m \\ x=\frac{\ }{6}+2n \end{cases} \quad (m,n\in Z)$$

$$\text{ĐS } x=\frac{\ }{6}+2k \quad (k\in Z)$$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐỐI LẬP

Phương pháp này được xây dựng trên tính chất: Để giải phương trình $f(x)=g(x)$, ta có thể nghĩ đến việc chứng minh tồn tại A → R: $f(x)\ge A, \forall x\in(a,b)$ và $g(x)\le A, \forall x\in(a,b)$ thì khi đó:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=A \\ g(x)=A \end{cases}$$

Nếu ta chỉ có $f(x)>A$ và $g(x)<A$, $\forall x\in(a,b)$ thì kết luận phương trình vô ngiệm.

Bài 2. Giải phương trình: $\cos^5 x+x^2=0$

Hướng dẫn

$\cos^5 x+x^2=0 \Leftrightarrow x^2=-\cos^5 x$

Vì $-1\le \cos x\le 1$ nên $0\le x^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$

mà $[-1,1]\subset\left(\frac{-}{2},\frac{\ }{2}\right) \Rightarrow \cos x>0, \forall x\in[-1,1] \Rightarrow -\cos^5 x<0, \forall x\in[-1,1]$

Do $x^2>0$ và $-\cos^5 x<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 3. Giải phương trình: $\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = 1$ (1)

Hướng dẫn

(1) $\Leftrightarrow \sin^{1996} x + \cos^{1996} x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^{1994} x - 1) = \cos^2 x(1 - \cos^{1994} x)$ (2)

Ta thấy $\begin{cases} \sin^2 x \geq 0 \\ \sin^{1994} x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x(\sin^{1994} x - 1) \leq 0, \forall x$

Mà $\begin{cases} \cos^2 x \geq 0 \\ 1 - \cos^{1994} x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x(1 - \cos^{1994} x) \geq 0, \forall x$

Do đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x(\sin^{1994} x - 1) = 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos^{1994} x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = \frac{\ }{2} + m \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\ }{2} + n \\ x = n \end{array}\right. \end{cases}$ $(m, n \in Z)$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = k\frac{\ }{2} (k \in Z)$

ĐS $x = k\frac{\ }{2} (k \in Z)$

Áp dụng phương pháp đối lập, ta có thể suy ra cách giải nhanh chóng những phương trình lượng giác ở các dạng đặc biệt dưới đây:

(1). $\sin ax.\sin bx = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin ax = 1 \\ \sin bx = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin ax = -1 \\ \sin bx = -1 \end{cases} \end{array}\right.$ (2). $\sin ax.\sin bx = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin ax = 1 \\ \sin bx = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin ax = -1 \\ \sin bx = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Cách giải tương tự cho các phương trình thuộc dạng:

$\cos ax.\cos bx = 1$

$\cos ax.\cos bx = -1$

$\sin ax.\cos bx = 1$

$\sin ax.\cos bx = -1$

III. PHƯƠNG PHÁP ĐOÁN NHẬN NGHIỆM VÀ CHỨNG MINH TÍNH DUY NHẤT CỦA NGHIỆM

Tuỳ theo dạng và điều kiện của phương trình, ta tính nhẩm một nghiệm của phương trình, sau đó chứng tỏ nghiệm này là duy nhất bằng một trong những cách thông sụng sau:

+ Dùng tính chất đại số

+ Áp dụng tính đơn điệu của hàm số

Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $x = \quad \in (a, b)$ và hàm f đơn điệu trong (a, b) thì $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = \quad$.

Phương trình $f(x)=g(x)$ có 1 nghiệm $x= \ \in(a,b)$, $f(x)$ tăng (giảm) trong (a,b), $g(x)$ giảm (tăng) trong (a,b) thì phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm $x=$ là duy nhất.

Bài 4. Giải phương trình: $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}$ với $x>0$

Hướng dẫn

Ta thấy ngay phương trình có 1 nghiệm $x=0$.

Đặt $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$ là biểu thức của hàm số có đạo hàm $f'(x)=-\sin x+x>0, \forall x>0$

(vì $|x|>|\sin x|, \forall x$)

$\Rightarrow$ Hàm f luôn đơn điệu tăng trong $(0,+\infty)$

$\Rightarrow$ $f(x)=0$ có 1 nghiệm duy nhất trong $(0,+\infty)$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $x=0$.

CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Bài 1: Giải phương trình: $x^2-2x\cos x-2\sin x+2=0$ (1)

Hướng dẫn

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2-2x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-\cos x)^2+(\sin x-1)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\cos x=0 \\ \sin x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = x \\ \sin x = 1 \end{cases}$$

Phương trình vô nghiệm.

Bài 2: Giải phương trình: $\sin^4 x+\cos^{15} x=1$

Hướng dẫn

Ta có: $\sin^4 x+\cos^{15} x=1$

$\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^{15} x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^2 x-1)=\cos^2 x(1-\cos^{13} x)$ (1)

Vì $\sin^2 x(\sin^2 x-1)\le 0, \forall x$

Và $\cos^2 x(1-\cos^{13} x)\ge 0, \forall x$

Do đó (1) $$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x(\sin^2 x-1)=0 \\ \cos^2 x(1-\cos^{13} x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=\pm 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=\frac{}{2}+m \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{}{2}+n \\ x=2n \end{array}\right. \end{cases} \quad (m,n\in Z)$$

ĐS $x=\frac{}{2}+k$ hay $x=2k$, $(k\in Z)$

Bài 3: Giải các phương trình:

1). $\sin^4 x+\cos^4(x+\frac{}{4})=\frac{1}{4}$ (1) 2). $(\tan x+\frac{1}{4}\cot x)^n=\cos^n x+\sin^n x (n=2,3,4,...)$

Hướng dẫn

1). Ta có:

$$(1) \quad \Leftrightarrow \frac{(1-\cos 2x)^2}{4}+\frac{\left[1+\cos(2x+\frac{}{2})\right]^2}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x-\frac{}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k \\ x=\frac{}{4}+k \end{array}\right. \quad (k\in Z)$$

2). Với điều kiện $x\neq k\frac{}{2}$ ta có $\tan x$ và $\cot x$ luôn cùng dấu nên:

$$\left|\tan x+\frac{1}{4}\cot x\right|=|\tan x|+\left|\frac{1}{4}\cot x\right|\geq 2\sqrt{\left|\tan x\cdot\frac{1}{4}\cot x\right|}=1\Rightarrow\left|\tan x+\frac{1}{4}\cot x\right|^n\geq 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |\tan x|=\left|\frac{1}{4}\cot x\right|\Leftrightarrow \tan^2 x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \tan x=\pm\frac{1}{2}$

+ Với $n=2$: phương trình $\left(\tan x+\frac{1}{4}\cot x\right)^2=1$ có nghiệm cho bởi:

$$\tan x=\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\arctan\frac{1}{2}+k \quad (k\in Z)$$

+ Với $n\in Z, n>2$ thì:

$\cos^n x+\sin^n x\leq \cos^2 x+\sin^2 x=1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\frac{}{2} \; khi \; n=2m \\ x=2k \quad hay \; x=\frac{}{2}+2k \quad khi \; n=2m+1 \end{array}\right. \quad (k,m\in Z)$

(đều không thoả mãn điều kiện $x\neq k\frac{}{2}$ của phương trình)

Vậy với $n>2, n\in Z$ thì phương trình vô nghiệm.

ĐS $x=\pm\arctan\frac{1}{2}+k \quad (k\in Z)$

Bài 4: Giải phương trình: $\cos x\sqrt{\frac{1}{\cos x}-1}+\cos 3x\sqrt{\frac{1}{\cos 3x}-1}=1$ (1)

Hướng dẫn

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x>0\\ \cos 3x>0\end{cases}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\cos x-\cos^2 x}+\sqrt{\cos 3x-\cos^2 3x}=1$

Vì $a^2 - a + \frac{1}{4} = (a - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow a - a^2 \leq \frac{1}{4}$

Do đó $\cos x - \cos^2 x \leq \frac{1}{4}$ và $\cos 3x - \cos^2 3x \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{\cos x - \cos^2 x} \leq \frac{1}{2}$ *và* $\sqrt{\cos 3x - \cos^2 3x} \leq \frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \cos^2 x = \frac{1}{4} \\ \cos 3x - \cos^2 3x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos 3x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$

Hướng dẫn

$$\sin^3 x \leq \sin^2 x, \forall x$$
$$\cos^3 x \leq \cos^2 x, \forall x$$
$$\Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x \leq 1, \forall x$$
$$2 - \sin^4 x \geq 1, \forall x$$

Vậy phương trình tương đương: $\begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x = 1 \\ 2 - \sin^4 x = 1 \end{cases}$. ĐS $x = \frac{}{2} + 2k \quad (k \in Z)$

Bài 6: Giải phương trình: $\sin x + \tan x - 2x = 0$ với $0 \leq x \leq \frac{}{2}$

Hướng dẫn

Dễ thấy phương trình có 1 nghiệm $x = 0$

Đặt $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên $\left[0; \frac{}{2}\right)$

Có đạo hàm: $f'(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x} \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{}{2}\right)$ do

$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \leq \cos x \leq 1 < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos^2 x - \cos x - 1 < 0$

$\Rightarrow f$ đơn điệu tăng trên $\left[0; \frac{}{2}\right)$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN TỔNG HỢP

Bài 1: Giải phương trình: $\sin 2x-\cos 2x=2\sin x-1$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sin 2x-2\cos^2 x=3\sin x-\cos x$.

Bài 3: Giải phương trình: $2\cos 2x+8\sin x-5=0$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sin(2x+\frac{17}{2})+16=2\sqrt{3}.\sin x\cos x+20\sin^2(\frac{x}{2}+\frac{}{12})$

Bài 5: Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3}(2.\cos^2 x+\cos x-2)+(3-2\cos x).\sin x}{2\cos x+1}=0$

Bài 6: Giải phương trình: $2(\cos x+\sin 2x)=1+4\sin x(1+\cos 2x)$

Bài 7: Giải phương trình: $\sin 2x+1=6\sin x+\cos 2x$.

Bài 8: Giải phương trình: $3\sin x-\cos x+2-\cos 2x-\sin 2x=0$

Bài 9: Giải phương trình : $\sin 2x-(\sin x+\cos x-1)(2\sin x-\cos x-3)=0$

Bài 10: Giải phương trình lượng giác: $\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+3\sin x-3\sin^2 x=0$

Bài 11: Giải phương trình : $\sqrt{3}(\cos 2x - \sin x)+\cos x(2\sin x+1)=0$.

Bài 12: Giải phương trình sau: $\cos\left(\frac{}{4}-x\right)-\sin\left(2x+\frac{}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 13: Giải phương trình: $(2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\cos^2 x=3$.

Bài 14: Giải phương trình: $2\cos 5x.\cos 3x+\sin x=\cos 8x$

Bài 15: Giải phương trình $\sin 2x+1=6\sin x+\cos 2x$.

Bài 16: Giải phương trình: $\cos 2x+2\sin x-1-2\sin x\cos 2x=0$.

Bài 17: Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x-1}{2\cos x-1}=0$

Bài 18: Giải phương trình: $\sin 2x-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=5$

Bài 19: Giải phương trình $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$

Bài 20: Giải phương trình: $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0$.

Bài 21: Giải phương trình: $\sin 2x+\cos x-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{}{4}\right)-1=0$.

Bài 22: Giải phương trình: $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$

Bài 23: Giải phương trình $\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{}{4}\right)$.

Bài 24: Giải phương trình: $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x-2\sin x=0$.

Bài 25: Giải phương trình : $2\sin^2\left(x-\frac{}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$

Bài 26: Giải phương trình: $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0$.

Bài 27: Giải phương trình $\cos x+2\sin x(1-\cos x)^2=2+2\sin x$.

Bài 28: Giải phương trình lượng giác sau: $2\cos^2\left(\frac{}{4}-2x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1$.

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP TỰ LUYỆN TỔNG HỢP

Bài 1: Giải phương trình: $\sin 2x-\cos 2x=2\sin x-1$.

Hướng dẫn

Biến đổi phương trình về dạng : $2\sin x(\cos x-1)+2\sin^2 x=0$

$$\sin x(\sin x+\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x-1=0\end{array}\right.$$

\+ Với $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k2$

\+ Với $\sin x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\\ x=\frac{}{2}+k2\end{array}\right.$, $k\in Z$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm. $x=k$, $x=\frac{}{2}+k2$

Bài 2: Giải phương trình: $\sin 2x-2\cos^2 x=3\sin x-\cos x$.

Hướng dẫn

Phương trình đã cho tương đương $2\sin^2 x-3\sin x-2+2\sin x\cos x+\cos x=0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sin x+\cos x-2)=0$$

\+ $\sin x+\cos x-2=0$: Phương trình vô nghiệm

\+ $2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{}{6}+k2\\ x=\frac{7}{6}+k2\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=-\frac{}{6}+k2$, $x=\frac{7}{6}+k2$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 3: Giải phương trình: $2\cos 2x+8\sin x-5=0$.

Hướng dẫn

$2\cos 2x+8\sin x-5=0 \Leftrightarrow 2(1-2\sin^2 x)+8\sin x-5=0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x-8\sin x+3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{3}{2}\text{(loại)}\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{}{6}+k2\\ x=\frac{5}{6}+k2\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 4: Giải phương trình: $\sin(2x+\frac{17}{2})+16=2\sqrt{3}.\sin x\cos x+20\sin^2(\frac{x}{2}+\frac{}{12})$

Hướng dẫn

Biến đổi phương trình đã cho tương đương với

$$\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+10\cos(x+\frac{}{6})+6=0$$

$\Leftrightarrow \cos(2x+\frac{}{3})+5\cos(x+\frac{}{6})+3=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2(x+\frac{}{6})+5\cos(x+\frac{}{6})+2=0$

Giải được $\cos(x+\frac{}{6})=-\frac{1}{2}$ và $\cos(x+\frac{}{6})=-2$ (loại)

+ Giải $\cos(x+\frac{}{6})=-\frac{1}{2}$ được nghiệm $x=\frac{}{2}+k2$ và $x=-\frac{5}{6}+k2$

Bài 5: Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3}(2.\cos^2 x+\cos x-2)+(3-2\cos x).\sin x}{2\cos x+1}=0$

Hướng dẫn

ĐK: $x\neq\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

Pt đã cho tương đương với pt:

$$\left(2sinx-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}sinx+cosx\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{3}sinx+cosx=0\end{array}\right.$$

$$*)\ sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\ (t/m)\\ x=\frac{2\pi}{3}+2k_2\pi\ (L)\end{array}\right.$$

$$*)\ \sqrt{3}sinx+cosx=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k_3\pi\ (t/m)$$

Vậy pt có 2 họ nghiệm $x=\frac{\pi}{3}+2k_1\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{6}+k_3\pi$ $(k_1;k_3\in Z)$

Bài 6: Giải phương trình: $2(\cos x+\sin 2x)=1+4\sin x(1+\cos 2x)$

Hướng dẫn

Phương trình đã cho tương đương với: $2\cos x+2\sin 2x=1+4\sin 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow (1-2\cos x)(2\sin 2x-1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \sin 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{}{3}+k2\\ x=\frac{}{12}+k\\ x=\frac{5}{12}+k\end{array}\right.\quad(k\in Z)$$

Vậy pt có nghiệm là: $x=\pm\frac{}{3}+k2$; $x=\frac{}{12}+k$; $x=\frac{5}{12}+k$ $(k\in Z)$

Bài 7: Giải phương trình: $\sin 2x+1=6\sin x+\cos 2x$.

Hướng dẫn

$(\sin 2x-6\sin x)+(1-\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-3\right)+2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-3+\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 3(Vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k$. Vậy nghiệm của PT là $x = k \ , k \in Z$

Bài 8: Giải phương trình: $3\sin x - \cos x + 2 - \cos 2x - \sin 2x = 0$

Hướng dẫn

$\sin x - \cos x + 1 + 2\sin x + 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$

$\Leftrightarrow$ (1+2sinx)(sinx - cosx +1) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = -1 \\ \sin x = \frac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x - \frac{}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{6} + k2 \\ x = \frac{-}{6} + k2 \\ x = \frac{3}{2} + k2 \\ x = k2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k_3\pi \ \ (k_1; k_3 \in Z)$

Bài 9: Giải phương trình : $\sin 2x - (\sin x + \cos x - 1)(2\sin x - \cos x - 3) = 0$

Hướng dẫn

PT $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 - 1 = (\sin x + \cos x - 1)(2\sin x - \cos x - 3)$

$\Leftrightarrow [(\sin x + \cos x) - 1][(\sin x + \cos x) + 1] = (\sin x + \cos x - 1)(2\sin x - \cos x - 3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 1 \\ \sin x - 2\cos x = 4(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2 \\ x = \frac{}{2} + k2 \end{array}\right.$$

Bài 10: Giải phương trình lượng giác: $\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x + 3\sin x - 3\sin^2 x = 0$

Hướng dẫn

$$\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x + 3\sin x - 3\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin x \\ \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0 & (1) \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3} & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{}{6} + k$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{}{6}\right) = \sin\frac{}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{}{2} + k2 \\ x = \frac{5}{6} + k2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm là $x=-\frac{}{6}+k$ hay $x=\frac{}{2}+k2$.

Bài 11: Giải phương trình : $\sqrt{3}\left(\cos 2x - \sin x\right)+\cos x\left(2\sin x+1\right)=0$.

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow \sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}\sin x-\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\cos\frac{}{3}+\cos 2x\sin\frac{}{3}=\sin x\cos\frac{}{6}-\cos x\sin\frac{}{6}$

$\Leftrightarrow \sin(2x+\frac{}{3})=\sin(x-\frac{}{6}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{}{3}=x-\frac{}{6}+k2 \\ 2x+\frac{}{3}=\quad-(x-\frac{}{6})+k2 \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{}{2}+k2 \\ x=\frac{5}{18}+\frac{k2}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Bài 12: Giải phương trình sau: $\cos\left(\frac{}{4}-x\right)-\sin\left(2x+\frac{}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn

Pt đã cho $\cos\left(\frac{}{4}-x\right)-\sin\left(2x+\frac{}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{}{4}-x\right)-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow \cos x+\sin x-\sin 2x-\cos 2x=1$

$\Leftrightarrow \sin x(1-2\cos x)+\cos x(1-2\cos x)=0.$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-2\cos x)=0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+\sin x=0 \\ 1-2\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \cos x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{}{4}+k \\ x=\pm\frac{}{3}+k2 \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có 3 họ nghiệm: $x=-\frac{}{4}+k$, $x=\pm\frac{}{3}+k2$,$(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 13: Giải phương trình: $\left(2\sin x+1\right)\left(3\cos 4x+2\sin x-4\right)+4\cos^2 x=3$.

Hướng dẫn

$\left(2\sin x+1\right)\left(3\cos 4x+2\sin x-4\right)+4\cos^2 x=3$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x+1\right)\left(3\cos 4x+2\sin x-4\right)+1-4\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x+1\right)\left(3\cos 4x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{}{6}+k2$ *hay* $x=\frac{7}{6}+k2$ *hay* $x=k\frac{}{2}$ với $k\in Z$.

Bài 14: Giải phương trình: $2\cos 5x.\cos 3x+\sin x=\cos 8x$

Hướng dẫn

PT $\Leftrightarrow$ cos2x + cos8x + sinx = cos8x $\Leftrightarrow$ 1- 2sin^{2}x + sinx = 0

$\Leftrightarrow$ sinx = 1 hoặc $\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\,}{2}+k2\;\; ; x=-\frac{\,}{6}+k2\;\; ; x=\frac{7}{6}+k2\;\; ,(k\in Z)$

Bài 15: Giải phương trình $\sin 2x+1=6\sin x+\cos 2x$.

Hướng dẫn

$\sin 2x+1=6\sin x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow (\sin 2x-6\sin x)+(1-\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x-3)+2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x-3+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x=3(Vn)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k$. Vậy nghiệm của PT là $x=k\;\; ,k\in Z$

Bài 16: Giải phương trình: $\cos 2x+2\sin x-1-2\sin x\cos 2x=0$.

Hướng dẫn

$+PT \Leftrightarrow \cos 2x(1-2\sin x)-(1-2\sin x)=0 \Leftrightarrow (\cos 2x-1)(1-2\sin x)=0$

+ Khi cos2x = 1 $\Leftrightarrow x=k$, k$\in$ Z

+ Khi $\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\,}{6}+k2$ hoặc $x=\frac{5}{6}+k2$, k$\in$ Z

Bài 17: Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x-1}{2\cos x-1}=0$

Hướng dẫn

$dk:\cos x\neq\frac{1}{2}$

$pt \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2$

$\Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\,}{6})=1 \Leftrightarrow x=\frac{\,}{3}+k$

Đối chiếu đk , pt có nghiệm : $x=\frac{4}{3}+m.2\quad (m\in Z)$

Bài 18: Giải phương trình: $\sin 2x-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=5$

Hướng dẫn

Đặt sinx + cosx = t $(|t|\leq\sqrt{2})$. $\Rightarrow$ sin2x = t^2 - 1

$\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t-6=0 \Leftrightarrow t=-\sqrt{2}$ (t/m)

+ Giải được phương trình sinx + cosx = $-\sqrt{2}$ … $\Leftrightarrow \cos(x-\frac{\,}{4})=-1$

+ Lấy nghiệm …

Kết luận : $x=\frac{5}{4}+k2$ (k$\in\mathbb{Z}$)

Bài 19: Giải phương trình $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$

Hướng dẫn

$\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ \cos x-\sin x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{}{4}\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{}{4}+k\\ x=\frac{}{2}+k2\ \ ,x=\ \ +k2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=\frac{}{4}+k\ \ ,x=\frac{}{2}+k2\ \ ,x=\ \ +k2\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Bài 20: Giải phương trình: $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0$.

Hướng dẫn

$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{}{6}\right)=\sin\frac{}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{}{6}+k\\ x=\frac{}{2}+k\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 21: Giải phương trình: sin2x + cosx- $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{}{4}\right)$-1= 0.

Hướng dẫn

PT đã cho tương đương: $\sin 2x+\cos x-(\sin x-\cos x)-1=0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+1)-\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \sin x=-1$ hoặc $\cos x=\frac{1}{2}$

+ $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{}{2}+k2\ \ .$

+ $\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{}{3}+2k\ \ .$

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là: $x=-\frac{}{2}+k2\ \ ;\ x=\pm\frac{}{3}+2k\ \ (k\in Z)$

Bài 22: Giải phương trình: $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$

Hướng dẫn

PT $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ \cos x-\sin x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{}{4}\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{}{4}+k\\ x=\frac{}{2}+k2\ \ ,x=\ \ +k2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=\frac{}{4}+k\ \ ,x=\frac{}{2}+k2\ \ ,x=\ \ +k2\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Bài 23: Giải phương trình $\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{}{4}\right)$.

Hướng dẫn

$$\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\cos 2x=1+\sin 2x+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin x\cos x-2\cos x\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos x+\sin x\right)\left(1+\sin x-\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x+\sin x=0\\ 1+\sin x-\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{}{2}+k\\ x=-\frac{}{4}+k\\ x=k2\\ x=\frac{3}{2}+k2\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy, phương trình có nghiệm: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{}{2}+k\\ x=-\frac{}{4}+k\\ x=k2\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Bài 24: Giải phương trình: $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x-2\sin x=0$.

Hướng dẫn

$$\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x-2\sin x=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin x \Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{}{3}\right)=\sin x.$$

Suy ra phương trình có các nghiệm: $x=-\frac{}{6}+k$; $x=\frac{}{6}+k\frac{}{2}$ (với $k\in\mathbb{Z}$)

Bài 25: Giải phương trình : $2\sin^2\left(x-\frac{}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$

Hướng dẫn

Đ/K $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{}{2}+l \quad (l\in\mathbb{Z}) \quad (*)$

Phương trình $\Leftrightarrow 1-\cos\left(2x-\frac{}{2}\right)=2\sin^2 x-\tan x \Leftrightarrow 1-\sin 2x=2\sin^2 x-\tan x$

$$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x+2\sin^2 x-\tan x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin x.\left(\cos x+\sin x\right)-\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x+\sin x\right)\left(\sin 2x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ \sin 2x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \sin 2x=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{}{4}+k \\ x=\frac{}{4}+k \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{}{4}+k\frac{}{2}, k\in\mathbb{Z}$$ (Thoả mãn điều kiện (*))

Bài 26: Giải phương trình: $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0$.

Hướng dẫn

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{}{6}\right)=\sin\frac{}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{}{6}+k \\ x=\frac{}{2}+k \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 27: Giải phương trình $cosx+2sinx(1-cosx)^2=2+2sinx$.

Hướng dẫn

$$PT \Leftrightarrow cosx+2sinx\left(1+cos^2x-2cosx\right)-2-2sinx=0 \Leftrightarrow (cosx-2)(1+sin2x)=0 \quad (*)$$

Do $cosx-2\neq 0$ nên $(*) \Leftrightarrow 1+sin2x=0 \Leftrightarrow sin2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{}{4}+k$.

Bài 28: Giải phương trình lượng giác sau: $2\cos^2\left(\frac{}{4}-2x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1$.

Hướng dẫn

Phương trình ban đầu tương đương:

$$1+\cos\left(\frac{}{2}-4x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x=2\cos^2 x-1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x-\frac{}{6}\right)=\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{}{12}+k \\ x=\frac{}{36}+\frac{k}{3} \end{array}\right.$$

NGUYỄN HỮU BIÊN - ***https://www.facebook.com/groups/nguyenhuubien***